

THESES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS

—
par

Guy CHAVENT

—
pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

1ère Thèse

ANALYSE FONCTIONNELLE ET IDENTIFICATION DE COEFFICIENTS
RÉPARTIS DANS LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

2ème Thèse

Propositions données par la Faculté :

DÉCOMPOSITION CANONIQUE DES PROCESSUS GAUSSIENS

Soutenues le **7 MAI 1971** devant la Commission d'examen

MM. LIONS

NEVEU

BENSOUSSAN

Président

} Examinateurs

THESES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS

par

Guy CHAVENT

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

1ère Thèse

ANALYSE FONCTIONNELLE ET IDENTIFICATION DE COEFFICIENTS
RÉPARTIS DANS LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

2ème Thèse

Propositions données par la Faculté :

DÉCOMPOSITION CANONIQUE DES PROCESSUS GAUSSIENS

Soutenues le

devant la Commission d'examen

MM. LIONS

NEVEU

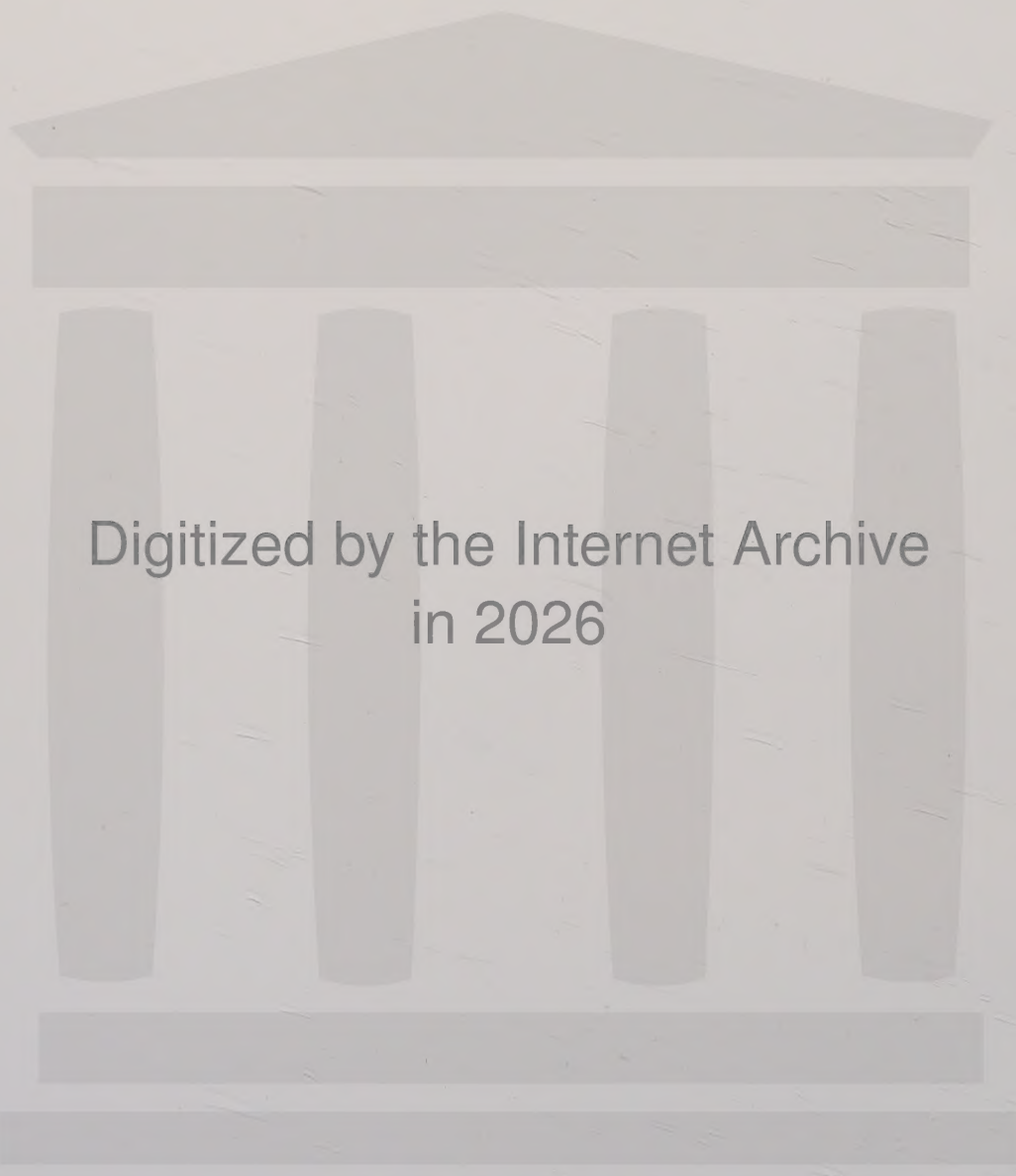
BENSOUSSAN

Président

} Examineurs

23234T





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556020_0031

I N T R O D U C T I O N

Donnons nous un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ , et considérons dans Ω le problème aux limites :

$$(1) \quad P(x, t, \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial t}; a) y = f \quad \text{dans } \Omega$$

$$(2) \quad B_j(x, t, \frac{\partial}{\partial x_i}; a) y = g_j \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad \text{sur } \Gamma$$

où P et B_j sont des opérateurs aux dérivées partielles linéaires ou non, dépendant d'un certain nombre de coefficients a , qui sont, en général, des fonctions de x et t .

Notre travail a consisté à rechercher un algorithme permettant d'identifier les coefficients a (nombres ou fonctions) sur le vu d'une observation de la solution y de (1) - (2), et à donner, dans des cas particuliers, des théorèmes d'existence et d'unicité des coefficients a .

1. EXEMPLE : EQUATION DU TYPE " DIFFUSION ISOTROPE STATIONNAIRE " :

$$(3) \quad - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a(x) \frac{\partial y}{\partial x_i}(x)) = f(x) \quad \text{dans } \Omega$$

$$(4) \quad \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

[Un tel système intervient par exemple dans le problème de gestion optimale de nappes d'eau (hydrogéologie) ou de pétrole ; $y(x)$ représente alors la pression au point x du domaine Ω , f le débit soutiré, et $a(x)$ la " diffusivité " du milieu au point x]

Selon les cas, on dispose sur la solution de ce système d'une quantité d'information variable, sous forme d'une observation z_d qui peut être :

- répartie : z_d est alors une fonction de x qui représente la solution de (3) (4) plus un bruit éventuellement
- ponctuelle : z_d est alors formée de k nombres z_{d_i} ($i=1..k$) qui représentent la solution de (3) (4) en k points $x_1, \dots, x_k$ de Ω , plus un bruit éventuellement
- sur la frontière :

et on cherche une fonction $a(x)$ telle que la solution de (3)(4) avec ce coefficient coïncide avec z_d sur les points d'observation. ■

2. LE PROBLEME DANS LE CAS GENERAL.

On se donne en plus de (1) (2) un opérateur d'observation $\mathcal{C}$ (linéaire ou non) :

- (5) $\mathcal{C} : y \text{ solution de (1) (2)} \longrightarrow \text{observation } \mathcal{C}(y)$
 ainsi qu'une observation particulière z_d , et on cherche des coefficients a tels que la solution y de (1) (2) avec ces coefficients vérifie $\mathcal{C}(y) = z_d$. C'est un problème inverse.

3. RESULTATS.

On utilise une méthode des moindres carrés du type :

- (6) " Trouver les coefficients a qui minimisent $J(a) = \|\mathcal{C}(y) - z_d\|^2$ "
 (où y dépend de a par l'intermédiaire de (1) et (2)).

Le Chapitre I est consacré à établir un certain nombre de théorèmes de dérivabilité de la solution y de (1) (2) par rapport à a , qui seront nécessaires au Chapitre II.

Au Chapitre II, l'introduction d'un état adjoint p permet de calculer le gradient de J par rapport aux coefficients a dans le cas où (1) (2) est un système linéaire elliptique, parabolique, hyperbolique du 2ème ordre, ainsi que dans le cas de systèmes non linéaires particuliers.

Il faut bien noter ici qu'on ne donne aucun résultat d'existence ou d'unicité du problème de contrôle non linéaire (6). C'est là un problème difficile. Pour un certain nombre de résultats dans cette direction, utilisant principalement des méthodes de compacité, cf. Lions [16][18], et Murat [20].

Par contre, en posant, dans un cas particulier, le problème sous une forme différente de (6), on pourra donner, au § 5, des résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème d'identification.

Le Chapitre III est consacré aux résultats numériques. La méthode choisie pour calculer les coefficients a est une méthode de gradient sur J utilisant les résultats du Chapitre II.

Les exemples traités sont des problèmes elliptiques à deux dimensions d'espace, paraboliques et hyperboliques du 2ème ordre à une dimension d'espace et une dimension de temps.

Dans tous les cas, la méthode a permis de rendre compte avec une bonne précision de l'observation. Lorsque les théorèmes d'unicité du Chapitre II s'appliquent, on retrouve le coefficient a ayant servi à construire le problème. Par contre, en dehors de ces cas, on trouve seulement une solution au problème d'identification.

4. COMMENTAIRES.

A l'origine de ce travail se trouve un article de Y. Kawamoto et J. Vidal [12] qui, pour un système parabolique avec observation répartie, introduisaient à l'aide de la programmation dynamique un Hamiltonien leur fournissant un état adjoint et permettant de minimiser la fonction des moindres carrés J . Cette même approche, alliée à la résolution analogique des équations aux dérivées partielles (Calcul Hybride), était utilisée par Venkateswararao Vemuri et Walter J. Karplus [27] pour trouver un modèle d'une nappe aquifère souterraine. Dans notre travail, l'utilisation des techniques de Lions [16] a permis de retrouver cet algorithme (cf. Chap.II, § 3.2, remarque 3.2), et de le généraliser à d'autres systèmes et à d'autres types d'observation.

Il y a encore relativement peu de travaux consacrés à l'identification dans les équations aux dérivées partielles.

Une formulation générale abstraite du problème peut être trouvée dans le rapport SEMA-DGRST N° 4 [24].

Les applications à l'hydrogéologie ont motivé un certain nombre de recherches. Outre les deux articles ci-dessus ([12] [27]), on peut citer Y. Emsellem [8] et R.W. Paulson [21].

S.G. Tzafestas [26], F.G. Perdreauxville et R.E. Goodson [22] proposent des algorithmes utilisant la formule de Green pour éliminer les dérivées en espace d'ordre supérieur de l'observation, qui sont peu significatives en présence de bruit. Malheureusement ces auteurs se sont limités au cas de l'observation répartie et des coefficients constants.

D.A. Wismer, R.L. Perrine et Y.Y. Haimès [28] ont remplacé la fonction à identifier par une fonction étagée, dont ils ont ajusté les niveaux et les domaines par une technique d'optimisation à plusieurs niveaux.

Les méthodes statistiques de l'estimateur de Bayes ont été généralisées aux équations aux dérivées partielles par Bensoussan [2] [3], mais les avantages de l'approche statistique sont compensés ici par la taille des calculs, qui croît rapidement avec le nombre de paramètres à identifier.

Une technique d'estimation récursive, utilisant une méthode de moindres carrés, proposée par Sridhar et Pearson [25] et adaptée aux équations aux dérivées partielles par G. Ciligot-Travain [7] a donné de bons résultats, mais est limitée aux problèmes d'évolution.

Laurentiev [13] et Laurentiev Romanov-Vasiliev [14] ont développé, pour les géologues, un procédé d'identification avec observations ponctuelles, dans l'équation des ondes.

Partant d'un point de vue très différent, Irving [9] approche le système d'équations aux dérivées partielles par un système d'équations différentielles à l'aide de l'algorithme de Ho.

La méthode que nous proposons ici a l'avantage d'être assez systématique, et a, comme corollaire, l'inconvénient de ne pas toujours être la plus performante. Par contre, elle permet de résoudre le problème d'identification dans des cas (observations ponctuelles et sur la frontière notamment) où il n'existait pas, à notre connaissance, de méthode bien adaptée. En outre, bien que la théorie soit développée du point de vue déterministe uniquement, il semble logique, et les essais numériques le confirment, que l'algorithme utilisé soit très stable en présence de bruit sur les données.

5. REMERCIEMENTS

Que M. LIONS veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude, pour m'avoir inspiré l'objet de ce travail et n'avoir cessé par la suite de me prodiguer encouragements et conseils.

Je remercie M. NEVEU et M. BENSOUSSAN de m'avoir fait l'honneur de bien vouloir participer au Jury.

Je remercie de sa confiance Monsieur l'Inspecteur Général de l'armement LACOSTE, qui m'a permis d'être détaché à l'I.R.I.A.

Ma reconnaissance va également à M. LAUDET, Directeur de l'I.R.I.A., grâce auquel j'ai eu toutes les facilités pour mener à bien ce travail.

Je tiens aussi à remercier mes camarades Luc TARTAR et François MURAT qui m'ont suggéré des simplifications notoires dans la rédaction, ainsi que mes collègues travaillant sur le même sujet hors de l'I.R.I.A. , Y. Emsellem (Ecole des Mines), J.F. Croce-Spinelli (SEMA) et E. Irving (E.D.F), avec qui j'ai pu échanger de nombreuses et fructueuses idées.

Mes remerciements vont aussi à tous mes camarades de l'IRIA, et particulièrement à Madame Anne-Marie Couhault (Vercoustre), à Gino Ciligot-Travain et à Maurice Goursat qui ont bien voulu se charger de la programmation des essais numériques, pour leur amicale et fructueuse collaboration.

Je tiens enfin à remercier Mesdemoiselles Eliville et Ravet pour le soin et la diligence qu'elles ont su apporter à la réalisation de ce document.

C H A P I T R E I

PROBLEMES AUX LIMITES

DERIVABILITE PAR RAPPORT AUX COEFFICIENTS

	Pages
<u>1. UN THEOREME ABSTRAIT</u>	7
<u>2. APPLICATION AUX PROBLEMES ELLIPTIQUES</u>	
2.1 Dérivabilité des solutions faibles	9
2.2 Application	10
2.3 Rappels sur les solutions fortes	13
2.4 Dérivabilité des solutions fortes	19
2.5 Un problème non linéaire	22
<u>3. APPLICATION AUX PROBLEMES PARABOLIQUES</u>	
3.1 Dérivabilité des solutions faibles	26
3.2 Application	28
3.3 Rappels sur les solutions fortes	31
3.4 Dérivabilité des solutions fortes	34
3.5 Un problème parabolique non linéaire	36
<u>4. ETUDE D'UN PROBLEME D'EVOLUTION HYPERBOLIQUE</u>	
4.1 Théorème abstrait	40
4.2 Application	46

1.

UN THEOREME ABSTRAIT

Soient

(1.1) $\mathcal{A}, Y, F$ trois espaces de Banach[$\mathcal{A}$ représente un espace d'opérateurs aux dérivées partielles, muni d'une norme $\| \quad \|$ Y représente l'espace des états, muni de la norme $\| \quad \|_Y$ F représente l'espace des seconds membres, muni de la norme $\| \quad \|_F$.]

Soient

(1.2) $\left\{ \begin{array}{l} Y_c \subset Y \quad \text{un ouvert de } Y \\ \mathcal{A}_c \subset \mathcal{A} \quad \text{un ouvert de } \mathcal{A}, f \in F \quad \text{un élément de } F \end{array} \right.$

et :

(1.3) $\Psi : \mathcal{A}_c \times Y_c \longrightarrow F$

une application ayant les propriétés suivantes :

(1.4) Ψ est de classe C^k de $\mathcal{A}_c \times Y_c$ dans F , $k \geq 1$.(1.5) $\forall A \in \mathcal{A}_c$ et $\forall y \in Y_c$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y}(A, y) \in \text{Isom}(Y; F)$ (1.6) $\left\{ \begin{array}{l} \forall A \in \mathcal{A}_c, \text{ l'équation } \Psi(A, y) = f \\ \text{admet une solution et une seule } y \in Y_c \end{array} \right.$ La propriété (1.6) définit y comme " fonction implicite " de A ; soit Φ cette fonction :(1.7) $\Phi : A \in \mathcal{A}_c \longrightarrow \Phi(A) = y \in Y_c$ défini en (1.6)

Le théorème des fonctions implicites s'énonce alors :

Théorème 1.1 Avec les hypothèses et notations (1.1) à (1.7) l'application

$\tilde{\Phi}$ est de classe C^k de $\mathcal{A}_c$ dans Y . En outre sa dérivée 1ère est donnée par :

$$(1.8) \quad \tilde{\Phi}'(A) = - \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y}(A, y) \right]^{-1} \circ \frac{\partial \Psi}{\partial A}(A, y) \quad \forall A \in \mathcal{A}_c$$

ce qui peut s'écrire :

$$(1.9) \quad \tilde{\Phi}'(A) : \delta A \in \mathcal{A} \longrightarrow \delta y \in Y \text{ solution de :}$$

$$(1.10) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}(A, y) \cdot \delta y + \frac{\partial \Psi}{\partial A}(A, y) \cdot \delta A = 0$$

2. APPLICATION AUX PROBLEMES ELLIPTIQUES.

Nous considérerons successivement la théorie variationnelle et la théorie hilbertienne des problèmes elliptiques linéaires.

2.1 Dérivabilité des solutions faibles (Théorie Variationnelle)

Pour plus de détails sur la théorie variationnelle, cf. LIONS [15] [16]

On se donne deux espaces de Hilbert V et H , avec $V \subset H$, V dense dans H , injection continue de V dans H . En identifiant H et son dual H' , on a la situation suivante :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} V \subset H \subset V' \\ \text{injections continues} \\ \text{inclusions denses} \end{array} \right.$$

on notera

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \parallel \parallel \text{ la norme dans } V \\ \parallel \parallel^* \text{ --- } V' \\ \parallel \parallel \text{ --- } H \\ (,) \text{ la dualité entre } V' \text{ et } V \text{ ainsi que le produit scalaire dans } H. \end{array} \right.$$

Nous prendrons alors, dans les notations du N° 1 :

$$(2.3) \quad \mathcal{A} = \mathcal{L}(V, V') \text{ muni de sa norme habituelle}$$

$$(2.4) \quad Y = V$$

$$(2.5) \quad F = V'$$

Nous prendrons ensuite pour $\mathcal{A}_c$ l'ensemble des opérateurs coercifs de V dans V' .

$$(2.6) \quad \mathcal{A}_c = \left\{ A \mid A \in \mathcal{A}, \exists \alpha > 0, \forall v \in V, (Av, v) \geq \alpha \|v\|^2 \right\}$$

Si alors on définit l'application Ψ par :

$$(2.7) \quad \Psi : (A, y) \in \mathcal{A} \times Y \longrightarrow Ay \in F$$

cette application est de classe C^∞ , et les propriétés (1.5) et (1.6) sont vérifiées d'après le théorème de Lax - Milgram. Le théorème 1.1 s'applique donc et s'énonce ici :

Théorème 2.1 Hypothèses et notations (2.1) (2.2) (2.3) et (2.6) .

Soit $f \in V'$. Alors l'application Φ définie par :

$$(2.8) \quad \Phi : A \in \mathcal{A}_c \longrightarrow \Phi(A) = y \in V \text{ solution de}$$

$$(2.9) \quad Ay = f$$

est de classe C^∞ de $\mathcal{A}_c$ dans V . Sa dérivée $\Phi'(A)$ est définie, pour tout $A \in \mathcal{A}_c$, par :

$$(2.10) \quad \Phi'(A) \cdot \delta A = - A^{-1} \cdot \delta A \cdot A^{-1} f \quad \forall \delta A \in \mathcal{A}$$

c'est-à-dire que, $\forall \delta A \in \mathcal{A}$, $\delta y = \Phi'(A) \cdot \delta A$ est solution de :

$$(2.11) \quad A \delta y = - \delta A \cdot \Phi(A)$$

2.2 Applications

Etant donné un entier $m \geq 1$ on pose ;

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega \subset \mathbb{R}^n, \text{ ouvert borné, de frontière } \Gamma \text{ variété différentiable de} \\ \text{classe } C^m, \Omega \text{ localement d'un seul côté de } \Gamma \\ \left\{ \Gamma_j \right\}_{j=0}^{m-1} \text{ } m \text{ parties de } \Gamma \text{ (éventuellement } \Gamma_j = \emptyset \text{)} \\ \left\{ B_j \right\}_{j=0}^{m-1} \text{ un système de } m \text{ opérateurs frontière d'ordre } < m, \\ \text{à coefficients dans } L^\infty(\Gamma) \end{array} \right.$$

Prenons alors :

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \left\{ v \mid v \in H^m(\Omega), B_j v = 0 \text{ sur } \Gamma_j, j = 0, 1, \dots, m-1 \right\} \\ \text{(avec la convention que, si } \Gamma_j = \emptyset, \text{ la condition} \\ B_j v = 0 \text{ disparaît).} \\ \text{Muni de la norme induite par } H^m(\Omega), V \text{ est un espace de} \\ \text{Hilbert.} \\ H = L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

On définit ensuite $\mathcal{A}$, l'espace des coefficients à identifier, par :

$$(2.14) \quad \Lambda = \prod_{|p|, |q| \leq m} L^\infty(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} L^\infty(\Gamma - \Gamma_j)$$

où p, q sont des multientiers : $p = (p_1 \dots p_n) \in \mathbb{N}^n$, et où $|p| = p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

Un élément λ de Λ se représentera (a_{pq}, c_j) . On munit Λ de sa norme naturelle :

$$(2.15) \quad \|\lambda\|_\Lambda = \sup \left\{ \sup_{|p|, |q| \leq m} \|a_{pq}\|_{L^\infty(\Omega)}, \sup_{j=0, 1 \dots m-1} \|c_j\|_{L^\infty(\Gamma - \Gamma_j)} \right\}$$

ce qui en fait un Banach. On définit ensuite une application $\lambda \longrightarrow A(\lambda)$ de Λ dans $\mathcal{A} = \mathcal{L}(V, V')$ par :

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda = (a_{pq}, c_j) \in \Lambda, \quad \forall u, v \in V, \\ \\ a(\lambda; u, v) = (A(\lambda)u, v) = \int_{\Omega} \sum_{|p|, |q| \leq m} a_{pq}(x) D^q u D^p v \, dx + \\ \\ + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma - \Gamma_j} c_j(x) B_j u B_j v \, d\Gamma \end{array} \right.$$

L'application définie par (2.16) est linéaire, continue de Λ dans $\mathcal{A} = \mathcal{L}(V, V')$

Donnons nous deux nombres α et M vérifiant :

$$(2.17) \quad 0 < \alpha < M$$

et posons :

$$(2.18) \quad \Lambda_{\text{adm}} = \left\{ \lambda \mid \lambda \in \Lambda, \|\lambda\|_\Lambda \leq M, \forall v \in V, (A(\lambda)v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \right\}$$

On obtient ainsi un convexe fermé borné Λ_{adm} de Λ ayant la propriété :

$$(2.19) \quad \lambda \in \Lambda_{\text{adm}} \longrightarrow A(\lambda) \in \mathcal{A}_c$$

Soit enfin $f \in V'$ définie par :

$$(2.20) \quad \begin{cases} v \in V \longrightarrow (f, v) = \int_{\Omega} f_0 v \, dx + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma - \Gamma_j} g_j B_j v \, d\Gamma \\ f_0 \in L^2(\Omega), \quad g_j \in L^2(\Gamma - \Gamma_j) \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

On écrira par abus :

$$(2.21) \quad \Phi(\lambda) = \Phi(A(\lambda)) \quad \forall \lambda \in \Lambda_{\text{adm}}$$

et on sait que $y = \Phi(\lambda)$, solution du problème (2.9) avec $A(\lambda)$ à la place de A , est une solution faible du problème elliptique suivant :

$$(2.22) \quad \begin{cases} \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq} D^q y) = f_0 & \text{dans } \Omega \\ B_j y = 0 & \text{sur } \Gamma_j \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \\ - \Psi_j y + c_j B_j y = g_j & \text{sur } \Gamma - \Gamma_j \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

où le système des opérateurs frontière $\{\Psi_j\}_{j=0}^{m-1}$ est adjoint, par rapport à

l'opérateur $A(\lambda)$ et à la formule de Green du système $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$,

c'est-à-dire vérifie la formule de Green :

$$(2.23) \quad \int_{\Omega} \sum_{|p|, |q| \leq m} a_{pq} D^q u D^p v \, dx = \int_{\Omega} \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq}(x) D^q u) \times v \, dx \\ - \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma} \Psi_j u B_j v \, d\Gamma \quad \forall u, v \in C^{2m}(\bar{\Omega})$$

(la formule de Green (2.23) est ici formelle car on n'a pas fait sur Ω des hypothèses de régularité suffisante).

Le théorème 2.1 s'écrit ici :

Théorème 2.2 Hypothèses et notations du § 2.2. Alors la solution faible, dans $H^m(\Omega)$, du problème (2.22) dépend de façon C^∞ des coefficients a_{pq} dans $L^\infty(\Omega)$ et c_j dans $L^\infty(\Gamma - \Gamma_j)$.

2.3 Rappels sur les Solutions fortes (Théorie Hilbertienne)

Pour plus de détails sur la théorie Hilbertienne, cf. LIONS - MAGENES [19]. Les résultats du paragraphe précédent permettront de prendre en compte les cas où l'observation est une application linéaire continue sur $H^m(\Omega)$ (par exemple une observation dans $L^2(\Omega)$). Ils seront insuffisants lorsque l'observation n'est définie que sur un espace de fonctions plus régulières que celles de $H^m(\Omega)$ (par exemple une observation ponctuelle pour n assez grand - cf. chap II, § 2.5)

Nous allons donc étudier le cas où les données (ouvert Ω , seconds membres, coefficients) sont plus régulières, ce qui entraînera que la solution est dans un espace de fonctions plus régulières.

Soient m et r deux entiers positifs :

$$(2.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega \subset \mathbb{R}^n, \text{ ouvert, borné, de frontière } \Gamma \text{ variété différentiable de} \\ \text{classe } C^{2m+r}, \text{ de dimension } n-1, \Omega \text{ étant localement d'un seul} \\ \text{côté de } \Gamma \end{array} \right.$$

$$(2.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } A = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq}(x) D^q) \\ \text{ii) } a_{pq} \in C^{|p|, |q|+r}(\bar{\Omega}) \text{ avec } |p|, |q| = \sup \{ |p|, |q| \} \end{array} \right.$$

soit p un entier vérifiant ⁽¹⁾

$$(2.26) \quad 0 \leq p \leq m-1$$

Donnons nous d'abord p opérateurs frontière B_j définis par :

$$(2.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } B_j u = \sum_{|h| \leq m_j} b_{jh}(x) D^h u, \quad 0 \leq m_j \leq m-1, \quad j = 0, 1, \dots, p-1 \\ \text{ii) } b_{jh} \in C^{2m+r-m_j}(\Gamma) \\ \text{iii) Le système } \left\{ B_j \right\}_{j=0}^{p-1} \text{ est normal sur } \Gamma \end{array} \right.$$

Donnons nous ensuite $m-p$ opérateurs frontière B'_j définis par :

(¹) Il y a ici une confusion de notation : la lettre p représente selon les cas :

- un multientier indiquant un ordre de dérivation (par exemple dans 2.25)
- un entier indiquant le nombre de conditions au bord stable (par exemple dans 2.27)
- en plus, au Chapitre II, p représentera aussi l'état adjoint !

$$(2.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad B'_j u = \sum_{|h| \leq \mu_j} b'_{jh}(x) D^h u \quad 0 \leq \mu_j \leq m-1, \quad j=p, \dots, m-1 \\ \text{ii)} \quad b'_{jh} = c^{2m+r-\mu_j}(\Gamma) \\ \text{iii)} \quad \text{le système } \{ B_0, B_1, \dots, B_{p-1}, B'_p, \dots, B'_{m-1} \} \text{ soit normal sur } \Gamma \end{array} \right.$$

Soit alors $\{\psi_j\}_{j=0}^{m-1}$ un système d'opérateurs frontière adjoint, par rapport à l'opérateur A et à une formule de Green, du système $\{ B_0, \dots, B_{p-1}, B'_p, \dots, B'_{m-1} \}$, c'est-à-dire vérifiant :

$$(2.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_j = \text{ordre de } \psi_j = 2m-1-\mu_j \quad j = p, \dots, m-1 \\ \sum_{|p|+|q| \leq m} a_{pq}(x) D^q u D^p v \, dx = \int_{\Omega} \sum_{|p|+|q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p(a_{pq}(x) D^q u) \times v \, dx \\ - \sum_{j=0}^{p-1} \int_{\Gamma} \psi_j u B_j v \, d\Gamma = \sum_{j=p}^{m-1} \int_{\Gamma} \psi_j u B'_j v \, d\Gamma \quad \forall u, v \in C^{2m+r}(\bar{\Omega}) \end{array} \right.$$

On définit ensuite l'adjoint formel A^* de A par :

$$(2.30) \quad A^* = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p(a_{qp}(x) D^q)$$

et on appelle $\{\psi_j^*\}_{j=0}^{m-1}$ le système d'opérateurs frontière adjoint, par rapport à l'opérateur A^* et à la formule de Green, du système

$\{ B_0, \dots, B_{p-1}, B'_p, \dots, B'_{m-1} \}$, c'est-à-dire vérifiant :

$$(2.31) \quad \int_{\Omega} \sum_{|p|, |q| \leq m} a_{qp}(x) D^q v D^p u \, dx = \int_{\Omega} \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p(a_{qp}(x) D^q v) \times u \, dx \\ - \sum_{j=0}^{p-1} \int_{\Gamma} \psi_j^* v B_j u \, d\Gamma = \sum_{j=p}^{m-1} \int_{\Gamma} \psi_j^* v B'_j u \, d\Gamma \quad \forall u, v \in C^{2m+r}(\bar{\Omega})$$

On considère alors le problème elliptique suivant :

$$(2.32) \quad \left\{ \begin{array}{ll} Ay = f_0 & \text{dans } \Omega \\ B_j y = g_j & \text{sur } \Gamma \quad j = 0, 1, \dots, p-1 \\ -\psi_j y + c_j(x) B_j' y = g_j & \text{sur } \Gamma' \quad j = p, \dots, m-1 \end{array} \right.$$

où :

$$(2.33) \quad \left\{ \begin{array}{ll} f_0 \in H^r(\Omega) & g_j \in H^{2m+r-m_j-1/2}(\Gamma') \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \\ c_j \in C^{2m+r-m_j}(\Gamma') & j = p, \dots, m-1 \end{array} \right.$$

On suppose en outre que les coefficients a_{pq} et c_j sont tels que :

$$(2.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \\ \int_{\Omega} \sum_{|p|, |q| \leq m} a_{pq}(x) D^q u D^p u \, dx + \int_{\Gamma} \sum_{j=p}^{m-1} c_j(x) [B_j' u]^2 \, d\Gamma > \alpha \|u\|_{H^m(\Omega)}^2 \\ \forall u \in H^m(\Omega) \quad \text{tel que} \quad B_j u = 0, \quad j = 0, 1, \dots, p-1 \end{array} \right.$$

On a alors le Théorème :

Théorème 2.3 Avec les hypothèses (2.24) à (2.29) et (2.33), (2.34), le problème (2.32) admet une solution et une seule $y \in H^{2m+r}(\Omega)$. En outre, l'application :

$$(f_0, g_0, g_1, \dots, g_{m-1}) \longrightarrow y$$

est linéaire continue de $H^r(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{2m+r-m_j-1/2}(\Gamma')$ dans $H^{2m+r}(\Omega)$.

Démonstration : Sous les hypothèses faites, l'opérateur A est proprement elliptique dans $\bar{\Omega}$, et les opérateurs

$$(2.35) \quad (B_0, \dots, B_{p-1}, -\psi_p + c_p B_p', \dots, -\psi_{m-1} + c_{m-1} B_{m-1}')$$

forment un système normal et recouvrant A sur Γ' . Le système (2.32) rentre donc dans le cadre de la théorie Hilbertienne des opérateurs elliptiques.

Il est alors facile de vérifier que le problème adjoint formel du problème (2.32)

par rapport à la formule de Green est

$$(2.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^* y = f_0 \quad \text{dans } \Omega \\ B_j y = g_j \quad \text{sur } \Gamma' \quad j = 0, \dots, p-1 \\ - \psi_j^* y + c_j(x) B_j' y = g_j \quad \text{sur } \Gamma' \quad j = p, \dots, m-1 \end{array} \right.$$

si on pose :

$$(2.37) \quad N = \left\{ u \mid u \in C^{2m+r}(\overline{\Omega}), A u = 0, B_j u = 0 \quad j = 0, \dots, p-1, \right. \\ \left. - \psi_j^* u + c_j(x) B_j' u = 0 \quad j = p, \dots, m-1 \right\}$$

et :

$$(2.38) \quad N^* = \left\{ u \mid u \in C^{2m+r}(\overline{\Omega}), A^* u = 0, B_j u = 0 \quad j = 0, \dots, p-1, \right. \\ \left. - \psi_j^* u + c_j(x) B_j' u = 0 \quad j = p, \dots, m-1 \right\}$$

on sait (cf LIONS - MAGENES, [19], Théorème 5.3 p 175 - Tome I) que le problème (2.32) admet une solution et une seule dans

$$H^{2m+r}(\Omega) \text{ pour tout } (f_0, g_0, \dots, g_{m-1}) \in H^r(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{2m+r-m_j-1/2}(\Gamma')$$

si et seulement si :

$$(2.39) \quad N = N^* = \{0\}$$

Il suffit donc de montrer que, sous les hypothèses faites, les problèmes homogènes associés à (2.32) et (2.36) n'admettent, dans $C^{2m+r}(\overline{\Omega})$, que la solution nulle.

Or si on pose :

$$(2.40) \quad V = \left\{ u \mid u \in H^m(\Omega), B_j u = 0 \quad j = 0, 1, \dots, p \right\}$$

(muni de la norme induite par $H^m(\Omega)$, V est un espace de Hilbert)

$$(2.41) \quad H = L^2(\Omega)$$

$$(2.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(u,v) = \int_{\Omega} \sum_{|p|, |q| \leq m} a_{pq}(x) D^q u D^p v \, dx + \int_{\Gamma} \sum_{j=p}^{m-1} c_j(x) B_j' u B_j' v \, d\Gamma \\ a^*(u,v) = a(v,u) \end{array} \right. \quad \forall u, v \in V$$

il est facile de vérifier que toute solution y de (2.32)
(où l'on a fait $f_0 = 0$, $g_0 = g_1, \dots, g_{m-1} = 0$) vérifie :

$$(2.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} y \in V \\ a(y,v) = 0 \end{array} \right. \quad \forall v \in V$$

et que toute solution y de (2.36) (où l'on a fait
 $f_0 = 0$, $g_0 = \dots, g_{m-1} = 0$) vérifie

$$(2.44) \quad \left\{ \begin{array}{l} y \in V \\ a^*(y,v) = 0 \end{array} \right. \quad \forall v \in V$$

[Montrons par exemple (2.43) :

- . D'après la 2^e équation de (2.32), on a bien $y \in V$
- . Soit alors φ quelconque telle que

$$(2.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in C^{2m+r}(\bar{\Omega}) \\ B_j \varphi = 0 \quad j = 0, 1, \dots, p-1 \end{array} \right.$$

En multipliant la 1^{ère} équation de (2.32) par φ , en intégrant sur Ω et en appliquant la formule de Green (2.29) il vient, compte tenu de (2.45) :

$$\int_{\Omega} \sum_{|p|, |q| \leq m} a_{pq}(x) D^q y D^p \varphi \, dx + \int_{\Gamma} \sum_{j=p}^{m-1} c_j(x) B_j' y B_j' \varphi \, d\Gamma = 0$$

ce qui, compte tenu de la 3^{ème} équation de (2.32), s'écrit

$$\int_{\Omega} \sum_{|p|, |q| \leq m} a_{pq}(x) D^q y D^p \varphi \, dx + \int_{\Gamma} \sum_{j=p}^{m-1} c_j(x) B_j' y B_j' \varphi \, d\Gamma = 0$$

ce qui donne (2.43) en utilisant le fait que les fonctions φ vérifiant (2.45) sont denses dans V .]

Or, grâce à l'hypothèse (2.34), $a(u,v)$ et $a^*(u,v)$ sont des formes bilinéaires coercives sur V , donc les problèmes (2.43) et (2.44) admettent une solution et une seule y dans V . Comme l'application

$u \in C^{2m+r}(\overline{\Omega}) \longrightarrow u \in H^m(\Omega)$ est injective, on a bien (2.39), et le problème (2.32) admet toujours une solution et une seule dans $H^{2m+r}(\Omega)$.

Il reste à vérifier que cette solution dépend continuellement des seconds membres, ce qui résulte des majorations a priori (LIONS - MAGENES [19], Théorème 5.1 p. 166 Tome 1) ou encore du théorème de Banach (une bijection linéaire continue admet un inverse continu).

2.4 Dérivabilité des Solutions fortes.

Nous allons utiliser les résultats rappelés dans le paragraphe précédent pour appliquer le théorème 1.1 et démontrer la dérivabilité de la solution y de (2.32) par rapport aux coefficients a_{pq} , b_{jh} et c_j

On se donne donc ici

$$(2.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \text{l'ordre } 2m \text{ de l'opérateur } A \\ - \text{l'indice } r \text{ de régularité} \\ - \text{l'ouvert } \Omega \text{ satisfaisant à (2.24)} \\ - \text{le nombre } p \text{ de conditions aux limites du type stable ainsi que leur} \\ \text{ordre } m_j : \quad 0 \leq m_j < m \quad j = 0, 1, \dots, p-1 \\ \\ - m-p \text{ entiers } \mu_j \text{ tels que } 0 \leq \mu_j < m, \quad j = p, \dots, m-1, \text{ et que} \\ \text{l'ensemble } \{ m_0, m_1, \dots, m_{p-1}, \mu_p, \dots, \mu_{m-1} \} \text{ recouvre tous les} \\ \text{entiers de } 0 \text{ à } m-1. \text{ On pose} \\ \\ \quad m_j = 2m-1 - \mu_j \quad j = p, \dots, m-1 \\ \\ - \text{Un système normal d'opérateurs frontière } \left\{ B_j' \right\}_{j=p}^{m-1} \text{ vérifiant} \\ (2.28) \text{ i) et ii)} \\ \\ - f_0 \in H^r(\Omega), \quad g_j \in H^{2m+r-m_j-1/2}(\Gamma) \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \end{array} \right.$$

On prend, dans les notations du § 1, pour Y l'espace :

$$(2.47) \quad Y = H^{2m+r}(\Omega)$$

et pour espace F :

$$(2.48) \quad F = H^r(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{2m+r-m_j-1/2}(\Gamma)$$

Munis des normes habituelles, ces deux espaces sont des Banach (même des Hilbert).

On prend ensuite :

$$(2.49) \quad \mathcal{A} = \left\{ \mathcal{P} \mid \mathcal{P} \in \mathcal{L}(Y; F), \quad \mathcal{P} = (A, B_j, -\psi_j + c_j B_j') \text{ où } A \text{ est de} \right. \\ \left. \text{la forme (2.25), où } \left\{ B_j \right\}_{j=0}^{p-1} \text{ est de la forme (2.27) i) et ii),} \right.$$

où $\{\Psi_j\}_{j=p}^{m-1}$ est adjoint de $\{B'_j\}_{j=p}^{m-1}$ par rapport à A et à la formule

de Green (2.29), et où $c_j \in C^{2m+r-m_j}(\Gamma)$ $j = p, \dots, m-1$

et on munit $\mathcal{A}$ de la norme :

$$(2.50) \quad \|\mathcal{P}\|_{\mathcal{A}} = \sup \left\{ \sup_{|p|, |q| \leq m} \|a_{pq}\|_{C^{2m+r-m_j}(\Gamma)}, \sup_{\substack{j=0, \dots, p-1 \\ |h| \leq m_j}} \|b_{jh}\|_{C^{2m+r-m_j}(\Gamma)}, \right.$$

$$\left. \sup_{j=p, \dots, m-1} \|c_j\|_{C^{2m+r-m_j}(\Gamma)} \right\}$$

On définit ensuite $\mathcal{A}_c$ par :

$$(2.51) \quad \mathcal{A}_c = \left\{ \mathcal{P} \mid \mathcal{P} \in \mathcal{A}, \text{ tels que (2.34) ait lieu, et tels que le système } \begin{matrix} \{B_j\} \\ j=0 \end{matrix}^{p-1} \right.$$

soit normal sur Γ $\left. \right\}$

On a alors le théorème :

Théorème 2.4 Avec les hypothèses et notations (2.46) à (2.51), l'appli-

cation Φ de l'ouvert $\mathcal{A}_c$ de $\mathcal{A}$ dans $Y = H^{2m+r}(\Omega)$ définie par :

$$(2.52) \quad \Phi : \mathcal{P} = (A, B_j, -\Psi_j + c_j B'_j) \in \mathcal{A}_c \longrightarrow y \in Y = H^{2m+r}(\Omega)$$

solution de :

$$(2.53) \quad \begin{cases} A y = f_0 & \text{dans } \Omega \\ B_j y = g_j & \text{sur } \Gamma \quad j = 0, 1, \dots, p-1 \\ -\Psi_j y + c_j B'_j y = g_j & \text{sur } \Gamma \quad j = p, \dots, m-1 \end{cases}$$

est de classe C^∞ en tout point de $\mathcal{A}_c$. Sa dérivée $\Phi'(\mathcal{P})$ au point

$\mathcal{P} \in \mathcal{A}_c$ est l'application linéaire :

$$(2.54) \quad \Phi'(\mathcal{P}) : \mathcal{P} = (\delta A, \delta B_j, \dots, \delta \Psi_j + \delta c_j B_j') \in \mathcal{A}$$

$\dashrightarrow \delta y \in Y = H^{2m+r}(\Omega)$ solution de :

$$(2.55) \quad \begin{cases} A \delta y = - \delta A y & \text{sur } \Omega \\ B_j \delta y = - \delta B_j y & \text{sur } \Gamma \quad j = 0, \dots, p-1 \\ - \Psi_j \delta y + c_j B_j' \delta y = - (- \delta \Psi_j y + \delta c_j B_j' y) & \text{sur } \Gamma \quad j = p, \dots, m-1 \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que les hypothèses du théorème 1.1 sont bien vérifiées. $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_c$, Y , F ont été définies. On prend pour application Ψ' :

$$(2.56) \quad \Psi' : \{(A, B_j, - \Psi_j + c_j B_j'), y\} \in \mathcal{A} \times Y \longrightarrow (A y, B_j y, - \Psi_j y + c_j B_j' y) \in F$$

qui est une application bilinéaire. Pour qu'elle soit C^∞ , il suffit qu'elle soit continue or :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H^{2m+r}(\Omega); H^r(\Omega))} \leq \sup_{|p|, |q| \leq m} \|a_{pq}\|_{C^{|p,q|+r}(\bar{\Omega})}$$

$$\|B_j\|_{\mathcal{L}(H^{2m+r}(\Omega); H^{2m+r-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma))} \leq \sup_{|h| \leq m_j} \|b_{jh}\|_{C^{2m+r-m_j}(\Gamma)}$$

(d'après les théorèmes de trace)

$$\|c_j B_j'\|_{\mathcal{L}(H^{2m+r}(\Omega); H^{2m+r-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma))} \leq \|c_j\|_{C^{2m+r-m_j}(\Gamma)} \times \text{cste}$$

$$\|\Psi_j\|_{\mathcal{L}(H^{2m+r}(\Omega); H^{2m+r-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma))} \leq \sup_{|p|, |q| \leq m} \|a_{pq}\|_{C^{|p,q|+r}(\bar{\Omega})}$$

(en effet, dans la démonstration de la formule de Green, on constate qu'on peut prendre les coefficients de Ψ_j dans $C^{2m+r-m_j}(\Gamma)$, et que ces coefficients dépendent continuellement de a_{pq} dans $C^{|p,q|+r}(\bar{\Omega})$).

Enfin (1.5) et (1.6) découlent du théorème 2.3 ■

2.5 Un Problème non linéaire

Nous allons étudier la dérivabilité, par rapport à la fonction

$\alpha \in L^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, de la solution y de l'équation

$$(2.57) \quad \begin{cases} -\Delta y + y + e^{\alpha y} = f & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma, \quad \Gamma = \text{bord de } \Omega. \end{cases}$$

pour laquelle nous allons d'abord donner un théorème d'existence :

Théorème 2.5 Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ régulière, $f \in L^\infty(\Omega)$ et $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant

$$(2.58) \quad \alpha(x) \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

Alors l'équation (2.57) admet une solution unique $y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$.

Démonstration. Nous suivrons, avec les adaptations nécessaires, la démonstration donnée par Brézis - Crandall - Pazy [5] dans le cas où $\alpha(x)$ est une fonction constante. On ne nuit pas à la généralité du problème en remplaçant (2.57) par :

$$(2.59) \quad \begin{cases} -\Delta y + y + e^{\alpha y} - 1 = f & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Définissons alors un opérateur β non borné dans $L^2(\Omega)$ par :

$$(2.60) \quad \begin{cases} D(\beta) = \{ u \mid u \in L^2(\Omega), e^{\alpha(x) u(x)} \in L^2(\Omega) \} \\ \beta(u) = e^{\alpha(x) u(x)} - 1 \end{cases}$$

L'opérateur β est maximal monotone dans $L^2(\Omega)$. Il est évidemment monotone, et il est maximal car, pour tout $u \in L^2(\Omega)$ et $\lambda > 0$, l'équation :

$$(2.61) \quad u_\lambda + \lambda \beta(u_\lambda) = u$$

admet toujours une solution $u_\lambda \in L^2(\Omega)$ (on a en effet les majorations :

$$(2.62) \quad |u_\lambda(x)| \leq |u(x)|$$

$$(2.63) \quad u_\lambda(x) \leq u(x) + \lambda \quad \text{partout sur } \Omega)$$

On peut ainsi définir, pour tout $\lambda > 0$, un opérateur β_λ " approchant " β par :

$$(2.64) \quad \beta_\lambda : u \in L^2(\Omega) \longrightarrow \beta(u_\lambda) \text{ où } u_\lambda \text{ est la solution de (2.61)}$$

On sait alors que, l'opérateur $-\Delta$ avec pour domaine $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ étant maximal monotone dans $L^2(\Omega)$, l'équation

$$(2.65) \quad \begin{cases} -\Delta y_\lambda + y_\lambda + \beta_\lambda(y_\lambda) = f & \text{dans } \Omega \\ y_\lambda = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

admet une solution unique $y_\lambda \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Appliquons un principe du maximum à l'équation (2.65); Soit

$\varphi = (y_\lambda - k)^+$ $k > 0$ à déterminer. En multipliant la 1ère équation de (2.65) par φ et en intégrant sur Ω , il vient

$$-\int_{\Omega} \Delta y_\lambda \varphi \, dx + \int_{\Omega} y_\lambda \varphi \, dx + \int_{\Omega} \beta_\lambda(y_\lambda) \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx$$

ce qui s'écrit en utilisant la formule de Green :

$$\underbrace{\int_{x \in \Omega} \overrightarrow{\text{grad}} y_\lambda^2 \, dx}_{\substack{y_\lambda(x) \geq k \\ \geq 0}} + \underbrace{\int_{\Omega} (y_\lambda - k)^+{}^2 \, dx}_{\geq 0} + \int_{\Omega} (k - f)(y_\lambda - k)^+ \, dx + \underbrace{\int_{\Omega} \beta_\lambda(y_\lambda)(y_\lambda - k)^+ \, dx}_{\geq 0} = 0$$

D'où :

$$(y_\lambda - k)^+ = 0 \quad \text{dès que } k - f(x) \geq 0 \quad \text{p p sur } \Omega$$

soit

$$(2.66) \quad y_\lambda(x) \leq \sup_{x \in \Omega} \text{Ess } f(x) \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

On a alors :

$$(2.67) \quad \beta_\lambda(y_\lambda)(x) = e^{\alpha(x) y_{\lambda,\lambda}(x)} - 1$$

où $y_{\lambda,\lambda}$ est la solution de (2.61) pour $u = y_\lambda$. On déduit alors

de (2.58), (2.63), (2.66) et (2.67) que :

$$(2.68) \quad |\beta_\lambda(y_\lambda)(x)| \leq 1 + e^{\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} (\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \lambda)}$$

Ce qui montre que :

$$(2.69) \quad \|\beta_\lambda(y_\lambda)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \text{Cste indépendante de } \lambda \text{ quand } \lambda \rightarrow 0. \text{ Ce}$$

qui entraîne en particulier

$$\|\beta_\lambda(y_\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{Cste indépendante de } \lambda \text{ quand } \lambda \rightarrow 0. \text{ Ce}$$

qui prouve, d'après un théorème de Brezis - Crandall - Pazy [5], que l'équation (2.59) admet une solution unique $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, et il est facile de vérifier que cette solution est dans $L^\infty(\Omega)$. ■

Nous pouvons maintenant étudier la dérivabilité de la solution y de (2.57) par rapport à la fonction α . Donnons nous :

$$(2.70) \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \text{ ouvert, borné, de frontière } \Gamma \text{ régulière.}$$

$$(2.71) \quad \mathcal{A} = L^\infty(\Omega)$$

$$(2.72) \quad \mathcal{A}_c = \left\{ \alpha \mid \alpha \in L^\infty(\Omega), \exists \alpha_0 > 0, \alpha(x) \geq \alpha_0 \text{ p.p. dans } \Omega \right\}$$

$$(2.73) \quad Y = \left\{ y \mid y \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \text{ telles que} \right.$$

$\Delta y \in L^\infty(\Omega) \}$ Muni de sa norme naturelle, Y est un espace de Banach.

$$(2.74) \quad F = L^\infty(\Omega), \quad f \in L^\infty(\Omega)$$

Définissons une application Φ de $\mathcal{A}_c$ dans Y par :

$$(2.75) \quad \Phi : \alpha \in \mathcal{A}_c \rightarrow y \in Y \text{ solution de (2.57)}$$

On a alors le théorème

Théorème 2.6 : Avec les hypothèses et notations (2.70) à (2.74), l'application Φ définie en (2.75) est de classe C^1 de l'ouvert $\mathcal{A}_c$ de $\mathcal{A}$

dans Y . Sa dérivée $\Phi'(\alpha)$ au point $\alpha \in \mathcal{A}_c$ est l'application linéaire :

$$(2.76) \quad \Phi'(\alpha) : \delta\alpha \in \mathcal{A} \rightarrow \delta y \in Y \text{ solution de :}$$

$$(2.77) \quad \begin{cases} -\Delta y + y + \alpha e^{\alpha y} = -\delta \alpha y e^{\alpha y} & \text{dans } \Omega \\ \delta y = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Démonstration.

On applique le théorème 1.1, avec $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_c$, Y et F donnés par (2.71) à (2.74), et Ψ donné par :

$$(2.78) \quad \Psi : (\alpha, y) \in \mathcal{A} \times Y \longrightarrow -\Delta y + y + e^{\alpha y} \in F. \blacksquare$$

3.

APPLICATION AUX PROBLEMES PARABOLIQUES

Comme au paragraphe précédent, nous considérerons successivement la théorie variationnelle puis la théorie Hilbertienne.

3.1

Dérivabilité des Solutions faibles (théorie Variationnelle)

Pour plus de détails sur la théorie variationnelle, cf. LIONS [15] [16]

On se donne deux espaces de Hilbert V et H comme au § 2.1, et un nombre $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$ fini.

On prend, dans les notations du § 1 :

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = L^\infty([0, T]; dt; \mathcal{L}(V, V')) \\ \quad = \text{ensemble des [classes d']} \text{ applications de} \\ \quad [0, T] \text{ dans } \mathcal{L}(V, V') \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dt - essentiellement bornés} \\ \text{mesurables} \end{array} \right.$$

Muni de la norme du sup-essentiel, $\mathcal{A}$ est un Banach (non réflexif) qui représente l'espace dans lequel on va chercher l'opérateur A .

$$(3.2) \quad Y = W(0, T) = \left\{ u \mid u \in L^2(0, T; V), \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V') \right\}$$

(espace des solutions)

$$(3.3) \quad F = L^2(0, T; V') \times H \quad (\text{espace des seconds membres})$$

On définit ensuite $\mathcal{A}_c$ comme l'ensemble des opérateurs coercifs :

$$(3.4) \quad \mathcal{A}_c = \left\{ A \mid A \in \mathcal{A}, \exists k \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall \varphi \in V, (A(t)\varphi, \varphi) + k|\varphi|^2 \geq \alpha \|\varphi\|^2 \text{ p.p. sur }]0, T[\right\}$$

On sait alors que, pour tout opérateur $A \in \mathcal{A}_c$, le système :

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} + A y = f \quad \text{p.p. sur }]0, T[\\ y(0) = y_0 \end{array} \right.$$

admet, pour tout $f \in L^2(0, T; V')$ et $y_0 \in H$, une solution unique $y \in W(0, T)$ et dépendant de façon continue des seconds membres.

Si donc on prend pour application Ψ :

$$(3.6) \quad \Psi : (A, Y) \in \mathcal{A} \times Y \longrightarrow \left(\frac{dy}{dt} + A y, y(0) \right) \in F$$

les hypothèses (1.5) à (1.6) du théorème 1.1 sont satisfaites, et le théorème s'énonce :

Théorème 5.1. Hypothèses et notations (3.1) (3.2) et (3.4) . Soient $f \in L^2(0, T; V')$ et $y_0 \in H$. Alors l'application Φ définie par :

(3.7) $\Phi : A \in \mathcal{A}_c \longrightarrow \Phi(A) = y \in W(0, T)$ solution de (3.5)
est de classe C^∞ de l'ouvert $\mathcal{A}_c$ de $\mathcal{A}$ dans $W(0, T)$. Sa dérivée $\Phi'(A)$
est défini, en tout point $A \in \mathcal{A}_c$ par :

(3.8) $\Phi'(A) : \delta A \in \mathcal{A} \longrightarrow \delta y \in W(0, T)$ solution de :

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \delta y + A \delta y = - \delta A \cdot \Phi(A) \\ \delta y(0) = 0 \end{array} \right.$$

3.2 Applications

Soit un entier $m \geq 1$ On pose :

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ ouvert borné, de frontière } \Gamma \text{ variété différentiable de classe } C^m, \\ \quad \Omega \text{ étant localement d'un seul côté de } \Gamma . \\ \{ \Gamma_j \}_{j=0}^{m-1} \text{ } m \text{ parties de } \Gamma \text{ (éventuellement } \Gamma_j = \emptyset \text{)} \\ Q = \Omega \times]0, T[\\ \Sigma = \Gamma \times]0, T[= \text{frontière latérale du cylindre } Q \\ \Sigma_j = \Gamma_j \times]0, T[\\ \{ B_j \}_{j=0}^{m-1} \text{ un système de } m \text{ opérateurs frontière d'ordre } < m, \\ \quad \text{indépendants du temps, à coefficients dans } L^\infty(\Gamma) . \end{array} \right.$$

On prend alors comme espaces V et H :

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \{ v \mid v \in H^m(\Omega), B_j v = 0 \text{ sur } \Gamma_j, j = 0, 1, \dots, m-1 \} \\ \quad \text{(avec la convention que, si } \Gamma_j = \emptyset, \text{ la condition } B_j v = 0 \text{ disparaît)} \\ \quad \text{Muni de la norme induite par } H^m(\Omega), V \text{ est un espace de Hilbert} \\ H = L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

ce qui satisfait à (2.1).

On définit ensuite l'espace Λ des coefficients à identifier par :

$$(3.12) \quad \Lambda = \prod_{|p|, |q| \leq m} L^\infty(Q) \times \prod_{j=0, \dots, m-1} L^\infty(\Sigma - \Sigma_j)$$

Un élément $\lambda = (a_{pq}, c_j) \in \Lambda$ aura pour norme :

$$\| \lambda \|_\Lambda = \sup \left\{ \sup_{|p|, |q| \leq m} \| a_{pq} \|_{L^\infty(Q)}, \sup_{j=0, 1, \dots, m-1} \| c_j \|_{L^\infty(\Sigma - \Sigma_j)} \right\}$$

ce qui fait de Λ un Banach.

On fait ensuite correspondre à tout coefficient $\lambda \in \Lambda$ un opérateur $A(\lambda) \in \mathcal{A}$ par :

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda = (a_{pq}, c_j) \in \Lambda, \quad \forall u, v \in V, \quad \forall t \in]0, T[\\ (A(\lambda; t) u, v) = a(\lambda; t; u, v) = \int_{\Omega} \sum_{|p|, |q| \leq m} a_{pq}(x, t) D^q u D^p v \, dx + \\ \quad + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma - \Gamma_j} c_j(x, t) B_j u B_j v \, d\Gamma \end{array} \right.$$

L'application (3.13) définit une application linéaire continue de Λ dans $\mathcal{A}$.
Donnons nous trois nombres k , α et M vérifiant :

$$(3.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} k \in \mathbb{R} \\ 0 < \alpha < M \end{array} \right.$$

Posons alors :

$$(3.15) \quad \Lambda_{\text{adm}} = \left\{ \lambda \mid \lambda \in \Lambda, \|\lambda\|_{\Lambda} \leq M, \forall v \in V, \text{ pour presque tout } t \in]0, T[, \right. \\ \left. (A(\lambda; t) v, v) + k |v|^2 \geq \alpha \|v\|^2 \right\}$$

Λ_{adm} est un convexe fermé borné de Λ ayant la propriété :

$$(3.16) \quad \lambda \in \Lambda_{\text{adm}} \xrightarrow{\quad \ominus \quad} A(\lambda) \in \mathcal{A}_c$$

Donnons nous

$f \in L^2(0, T; V')$ par :

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{à presque tout } t \in]0, T[\xrightarrow{\quad \ominus \quad} f(t) \in V' \text{ défini par :} \\ \forall v \in V, (f(t), v) = \int_{\Omega} f_0(x, t) v(x) \, dx + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma - \Gamma_j} g_j(x, t) B_j v \, d\Gamma \\ f_0 \in L^2(Q) \quad g_j \in L^2(\Sigma - \Sigma_j) \end{array} \right.$$

et prenons comme valeur initiale

$$(3.18) \quad y_0 \in L^2(\Omega)$$

On écrira par abus :

$$(3.19) \quad \Phi(\lambda) = \Phi(A(\lambda)) \quad \forall \lambda \in \Lambda_{\text{adm}}$$

On sait alors que $y = \Phi(\lambda)$, solution du problème (3.5), où l'on a remplacé A par $A(\lambda)$, est une solution faible du problème parabolique suivant

$$(3.20) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq}(x, t) D^q y) = f_0(x, t) \quad \text{dans } Q \\ B_j y = 0 \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{sur } \Sigma_j \\ - \Psi_j y + c_j(x, t) B_j y = g_j(x, t) \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{sur } \Sigma - \Sigma_j \\ y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{sur } \Omega \end{array} \right.$$

où le système des opérateurs frontière $\left\{ \Psi_j \right\}_{j=0}^{m-1}$ est adjoint, par rapport

à l'opérateur $A(\lambda; t)$ et à la formule de Green, du système $\left\{ B_j \right\}_{j=0}^{m-1}$

(cf. formule (2.23) où a_{pq} dépend maintenant de x et t).

Le théorème 3.1 s'écrit ici :

Théorème 3.2 Hypothèses et notation du § 3.2. Alors la solution faible $y \in W(0, T) \subset L^2(0, T; H^m(\Omega))$ du problème (3.20) dépend de façon C^∞ des coefficients a_{pq} dans $L^\infty(Q)$ et c_j dans $L^\infty(\Sigma - \Sigma_j)$.

3.3 Rappels sur les solutions fortes (Théorie Hilbertienne)

Pour plus de détails sur la théorie Hilbertienne, cf. LIONS - MAGENES [19]

De même que dans le cas elliptique, les résultats précédents seront insuffisants pour certains types d'observation (principalement les observations ponctuelles),

qui n'ont pas de sens sur $H^m(\Omega)$ pour n assez grand. On est donc amené à étudier la dérivabilité de solutions fortes par rapport aux coefficients.

Soit :

$$(3.21) \quad m > 0$$

et :

$$(3.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega \subset \mathbb{R}^n, \text{ ouvert borné, de frontière } \Gamma \text{ variété différentiable de} \\ \text{classe } C^{2m}(\bar{\Omega}), \text{ de dimension } n-1, \\ \Omega \text{ étant localement d'un seul côté de } \Gamma \end{array} \right.$$

$$(3.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad A = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^p D_x^p (a_{pq}(x, t) D_x^q) \\ \text{ii)} \quad a_{pq} \in C^{|p, q|, 1}(\bar{Q}) \end{array} \right.$$

où l'on a posé

$$(3.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall p, q \in \mathbb{N}^n \\ |p, q| = \sup(|p|, |q|) \quad \text{avec } |p| = \sum_{i=1}^n p_i, \quad |q| = \sum_{i=1}^n q_i \end{array} \right.$$

$$(3.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \ell, k \in \mathbb{N} \\ C^{\ell, k}(\bar{Q}) = \left\{ \varphi : \bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}^n, |i| \leq \ell, \right. \\ \left. \forall j \in \mathbb{N}^n, |j| \leq k, D_x^i D_t^j \varphi \in C^0(\bar{Q}) \right\} \quad (1) \end{array} \right.$$

Soient ensuite m opérateurs frontière B_j définis par :

(1) On munit $C^{\ell, k}(\bar{Q})$ de la norme naturelle :

$$\|\varphi\|_{C^{\ell, k}(\bar{Q})} = \sup_{|i| \leq \ell, |j| \leq k} \left\{ \|D_x^i D_t^j \varphi\|_{C^0(\bar{Q})} \right\}$$

$$(3.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i)} \quad B_j = \sum_{|h| \leq m_j} b_{jh}(x,t) D_x^h, \quad 0 \leq m_j \leq 2m-1 \\ \text{ii)} \quad b_{jh} \in C^{2m-m_j, 2m-m_j+1}(\bar{\Sigma}) \\ \text{iii)} \quad \forall t_0 \in [0, T], \text{ Le système } \left\{ B_j(x, t_0, \frac{\partial}{\partial x}) \right\}_{j=0}^{m-1} \text{ est } \underline{\text{normal}} \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

On suppose (c'est l'hypothèse fondamentale) que :

$$(3.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \text{ et } \forall t_0 \in [0, T], \text{ le système :} \\ \left\{ A(x, t_0, \frac{\partial}{\partial x}) + (-1)^m e^{i\theta} D_y^{2m}, B_j(x, t_0, \frac{\partial}{\partial x}) \right\} \\ \text{est elliptique régulière dans } \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_y \end{array} \right.$$

Donnons nous enfin f_0, g_j et y_0 avec :

$$(3.38) \quad f_0 \in L^2(Q)$$

$$(3.39) \quad g_j \in H^{2m-m_j-\frac{1}{2}, (2m-m_j-\frac{1}{2})/2m}(\Sigma) \quad 0 \leq j \leq m-1$$

$$(3.40) \quad y_0 \in H^m(\Omega)$$

et satisfaisant aux relations de compatibilité :

$$(3.41) \quad B_j(x, 0, \frac{\partial}{\partial x}) y_0(x) = g_j(x, 0) \quad \forall x \in \Gamma \quad \forall j \text{ tel que } 0 \leq m_j \leq m-1$$

On a alors le

Théorème 3.3 : Avec les hypothèses et notations (3.21) à (3.41), l'équation :

$$(3.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + A y = f_0 \quad \text{p p dans } Q \\ B_j y = g_j \quad j = 0, 1 \dots m-1 \quad \text{sur } \Sigma \\ y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{sur } \Omega \end{array} \right.$$

admet une solution et une seule $y \in H^{2m,1}(Q)$.

En outre cette solution dépend continuellement - pour des topologies évidentes - des données $\{ f_0, g_j, y_0 \}$.

Remarque : On peut se demander pourquoi on n'utilise pas le résultat de régularité le plus général, qui nous dit que si

$$f_0 \in H^{2rm, r}(Q), \text{ si } g_j \in H^{2(r+1)m - m_j - \frac{1}{2}; r+1 - (m_j + \frac{1}{2})/2m}(\Sigma)$$

$$\text{et si } y_0 \in H^{2(r + \frac{1}{2})m}(\Omega)$$

et vérifient des relations de compatibilité du type

$$(3.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists w \in H^{2(r+1)m, r+1}(Q) \text{ tel que} \\ B_j w = y_j \quad 0 \leq j \leq m-1 \\ w(x, 0) = y_0(x) \\ \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left[\frac{\partial w}{\partial t} + A w \right] \Big|_{t=0} = \frac{\partial^k}{\partial t^k} f_0(x, 0) \quad 0 \leq k \leq r - \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

alors le système (3.42) admet une solution et une seule $y \in H^{2(r+1)m, r+1}(Q)$ dépendant continuellement des données (le théorème précédent est obtenu en faisant $r = 0$)

La raison en est que, dès que $r > 0$, les relations de compatibilité (3.43) font intervenir à la fois les coefficients b_{jh} et a_{pq} . Il est clair que, $\{f_0, g_j, y_0\}$ étant donnés, si le système (3.42) a une solution y pour des coefficients (a_{pq}, b_{jh}) , il n'aura plus de solution pour des coefficients $(a_{pq} + \delta a_{pq}, b_{jh} + \delta b_{jh})$ aussi "voisins" que l'on veut de (a_{pq}, b_{jh}) , car les relations de compatibilité (3.43) ne seront plus satisfaites avec ces nouveaux coefficients ; l'étude de la dérivabilité de y par rapport à (a_{pq}, b_{jh}) serait alors impossible ; à moins de raisonner sur la "variété différentielle" des solutions de (3.43) ce que nous ne ferons pas. ■

3.4 Dérivabilité des solutions fortes.

Nous allons utiliser les résultats rappelés dans le paragraphe précédent pour appliquer le théorème 1.1 et montrer la dérivabilité de la solution y de (3.42) par rapport aux coefficients a_{pq} et b_{jh} .

Les données sont ici :

$$(3.44) \left\{ \begin{array}{l} - \text{l'ordre } 2m \text{ de l'opérateur } A \\ - \text{l'ouvert } \Omega \text{ de } \mathbb{R}^n, \text{ satisfaisant à (3.22)} \\ - \text{le nombre } p \text{ des conditions aux limites du type stable, ainsi que les} \\ \text{opérateurs correspondant } B_j, j = 0, 1, \dots, p-1, \text{ d'ordre } m_j, \text{ avec} \\ 0 \leq m_j \leq m-1, \text{ vérifiant (3.36) i) et ii) et tels que,} \\ \forall t_0 \in [0, T], \text{ le système } \left\{ B_j(x, t_0, \frac{\partial}{\partial x}) \right\}_{j=0}^{p-1} \text{ soit} \\ \text{normal sur } \Gamma. \\ - \text{les } m-p \text{ ordres } m_j, j = p, \dots, m-1, \text{ des conditions aux limites de} \\ \text{type transversal.} \\ - f_0, g_j, y_0 \text{ comme dans (3.38) (3.39) (3.40), } g_j, j = 0, 1, \dots, p-1 \\ \text{et } y_0 \text{ satisfaisant en outre aux relations de compatibilité (3.41).} \end{array} \right.$$

Nous définissons l'espace $\mathcal{A}$ des opérateurs par :

$$(3.45) \quad \mathcal{A} = \left\{ \mathcal{P} \mid \mathcal{P} \in \mathcal{L}(H^{2m,1}(Q), L^2(Q) \times \prod_{j=p}^{m-1} H^{2m-m_j-\frac{1}{2}, (2m-m_j-\frac{1}{2})/2m}(\Sigma_j)) \right\}$$

$$\mathcal{P} = (A, B_j, j = p, \dots, m-1), \text{ où } A \text{ est de la forme (3.33) i) et ii) et où } B_j \text{ est de la forme (3.36) i) et ii) \}$$

On munit $\mathcal{A}$ de la norme :

$$(3.46) \quad \|\mathcal{P}\|_{\mathcal{A}} = \sup \left\{ \sup_{|p|, |q| \leq m} \|a_{pq}\|_{C^{p,q}, 1(\bar{Q})}, \sup_{j=p, \dots, m-1} \sup_{\substack{0 \leq h \leq m_j \\ C}} \|b_{jh}\|_{2m-m_j, 2m-m_j+1}(\Sigma_j) \right\}$$

ce qui fait de $\mathcal{A}$ un espace de Banach.

On définit enfin l'ouvert $\mathcal{A}_c$ de $\mathcal{A}$ par :

$$(3.47) \quad \mathcal{A}_c = \left\{ \mathcal{P} = (A, B_j \ j = p, \dots, m-1) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{A}, \ \left\{ B_j \right\}_{j=0}^{m-1} \text{ vérifie (3.36) iii) } \right. \\ \left. \text{et que (3.37) ait lieu.} \right\}$$

On a alors le :

Théorème 3.4 : Avec les hypothèses et notations (3.44) à (3.47), l'application Φ de l'ouvert $\mathcal{A}_c$ de $\mathcal{A}$ dans $H^{2m,1}(Q)$ définie par :

$$(3.48) \quad \Phi : \mathcal{P} = (A, B_j \ j = p, \dots, m-1) \in \mathcal{A}_c \longrightarrow y \in H^{2m,1}(Q) \text{ solution de (3.42) est dérivable en tout point de l'ouvert } \mathcal{A}_c \text{ de } \mathcal{A}, \text{ et sa dérivée}$$

$\Phi'(\mathcal{P})$ au point $\mathcal{P} = (A, B_j \ j = p, \dots, m-1) \in \mathcal{A}_c$ est l'application linéaire :

$$(3.49) \quad \Phi'(\mathcal{P}) : \delta \mathcal{P} = (\delta A, \delta B_j, \ j=p, \dots, m-1) \in \mathcal{A} \longrightarrow \delta y \in H^{2m,1}(Q) \text{ solution de :}$$

$$(3.50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta y}{\partial t} + A \delta y = - \delta A \cdot y \\ B_j \delta y = 0 \quad j = 0, 1, \dots, p-1 \\ B_j \delta y = - \delta B_j y \quad j = p, \dots, m-1 \\ \delta y(x, 0) = 0 \end{array} \right.$$

Démonstration : Prenons, dans les notations du § 1, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_c$ donnés par (3.45), (3.46) et (3.47), et Y et F donnés par :

$$(3.51) \quad Y = H^{2m,1}(Q)$$

$$(3.52) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = L^2(Q) \times \tilde{F} \times \prod_{j=p}^{m-1} H^{2m-m_j-\frac{1}{2}, (2m-m_j-\frac{1}{2})/2m}(\Sigma) \\ \text{avec :} \\ \tilde{F} = \left\{ (y_0, g_j \ j=0, 1, \dots, p-1) \mid y_0 \in H^m(\Omega), g_j \in H^{2m-m_j-\frac{1}{2}, (2m-m_j-\frac{1}{2})/2m}(\Sigma) \right\} \end{array} \right.$$

$$j = 0, 1, \dots, p-1, \text{ telles que (3.41) ait lieu} \}$$

et définissons l'application Ψ par :

$$(3.53) \quad \Psi : \left\{ (A, B_j \ j = p, \dots, m-1), y \right\} \in \mathcal{A}_c \times Y \\ \longrightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial t} + A y, y(0), B_j y \ j = 0, 1, \dots, m-1 \right) \in F$$

Cette application est de classe C^∞ et vérifie les propriétés (1.5) (1.6) d'après le théorème 3.3. Le théorème 1.1 s'applique donc et donne le théorème 3.4. ■

3.5 Un problème parabolique non linéaire.

Soit :

$$(3.54) \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \text{ ouvert, borné}$$

$$(3.55) \quad V = H_0^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega)$$

En identifiant H et son dual H' on a la situation classique :

$$(3.56) \quad V \subset H \subset V'$$

Soit ensuite :

$$(3.57) \quad A = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}) + a_0(x) \in \mathcal{L}(V, V')$$

On suppose que :

$$(3.58) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega), \exists \alpha > 0 \text{ tel que } a_0(x) \geq \alpha \text{ p.p. dans } \Omega, \text{ et} \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ pp dans } \Omega \end{array} \right.$$

Soit enfin :

$$(3.59) \quad \gamma > 0 \quad \text{un nombre réel.}$$

On sait alors (cf LIONS [17], Théorème 1.3 chapitre II) que, pour tout

$f \in L^2(0, T; V') \oplus L^{p'}(Q)$ (où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) et pour tout

$y_0 \in L^2(\Omega)$, le système :

$$(3.60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j}) + a_0 y + |y|^\gamma y = f \quad \text{dans } Q \\ y = 0 \quad \text{sur } \sum \\ y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{sur } \Omega \end{array} \right.$$

admet une solution unique $y \in L^2(0, T; V) \cap L^{\gamma+2}(Q)$

telle que $\frac{dy}{dt} \in L^2(0, T; V') \oplus L^{p'}(Q)$.

Nous allons montrer le théorème de dérivabilité suivant :

Théorème 3.5 Avec les hypothèses et notations (3.54) à (3.59), plus :

$$(3.61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists M, \delta \in \mathbb{R}^+, M > \delta > 0, \quad \text{tels que} \\ 0 < \delta \leq a_0^{-1}(x) f(x, t) \leq M \quad \text{p.p. dans } Q \\ 0 < \delta \leq y_0(x) \leq M \quad \text{p.p. dans } Q \end{array} \right.$$

le système :

$$(3.62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} + A y + |y|^\gamma y = f \\ y(0) = y_0 \end{array} \right.$$

admet une solution unique y vérifiant :

$$(3.63) \quad \left\{ \begin{array}{l} y \in Y = \left\{ y \mid y \in L^1(0, T; V) \cap L^\infty(Q), \frac{dy}{dt} + A y \in L^\infty(Q), y(0) \in L^\infty(\Omega) \right\} \\ y(x, t) \geq \delta \quad \text{p.p. sur } Q \end{array} \right.$$

et cette solution dépend de façon dérivable de $\gamma \in \mathbb{R}^+$, la dérivée en un point $\gamma > 0$ étant l'application :

$$(3.64) \quad \delta \gamma \in \mathbb{R} \longrightarrow \delta y \in Y \quad \text{solution de :}$$

$$(3.65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d \delta y}{dt} + A \delta y + (\gamma + 1) |y|^\gamma \delta y = - \delta \gamma |y|^\gamma y \log y \\ \delta y(0) = 0 \end{array} \right.$$

Démonstration. La première partie du théorème se démontre en utilisant un principe du maximum ; soit $k > 0$ à déterminer, et $\varphi = (y - k)^+$. En multipliant par φ la 1ère équation de (3.60) et en intégrant sur Ω il vient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi\|^2 + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} [(a_0 + |y|^\gamma) k - f] \varphi dx + \int_{\Omega} (a_0 + |y|^\gamma) \varphi^2 dx = 0$$

D'où en intégrant de 0 à T, et compte tenu de (3.58) :

$$\frac{1}{2} \| y(t) - y_0 \|^2 + \int_0^t [|y|^\gamma (k - f)] \varphi(x) dx dt \leq \frac{1}{2} \| (y_0 - k) \|^2$$

ce qui donne :

$$y(x,t) \leq k \quad \text{dès que} \quad a_0(x) k \geq f(x) \quad \text{et} \quad k \geq y_0(x)$$

soit :

$$(3.66) \quad y(x,t) \leq M$$

et, en changeant f en $-f$ et y_0 en $-y_0$, ce qui revient à changer y en $-y$:

$$(3.67) \quad y(x,t) \geq S$$

Les inégalités (3.66) et (3.67) montrent en particulier que la solution y de (3.60) est dans $L^\infty(Q)$, d'où on déduit facilement qu'elle appartient à Y défini en (3.63). Reste à montrer la deuxième partie du théorème.

On utilisera pour cela le théorème 1.1 ; posons :

$$(3.68) \quad \begin{cases} Y_c = \{ y \mid y \in Y, \exists \varepsilon_0 > 0, y(x,t) \geq \varepsilon_0 \text{ p.p. dans } Q \} \\ \mathcal{A} = \mathbb{R} \quad \mathcal{A}_c =]0, +\infty[\\ F = L^\infty(Q) \times L^\infty(\Omega) \end{cases}$$

Alors $Y_c \times \mathcal{A}_c$ est un ouvert de $Y \times \mathcal{A}$. Définissons :

$$(3.69) \quad \Psi : (\alpha, y) \in \mathcal{A}_c \times Y_c \longrightarrow \left(\frac{dy}{dt} + A y + |y|^\gamma y, y(0) \right) \in F$$

Cette application Ψ a les propriétés suivantes :

• Ψ est de classe C^1 de $\mathcal{A}_c \times Y_c$ dans F (il est facile de vérifier que l'application $(\gamma, y) \longrightarrow |y|^\gamma y$ est de classe C^1 de $\mathcal{A}_c \times Y_c$ dans $L^\infty(Q)$, et de dérivée :

$$(3.70) \quad (\delta \gamma, \delta y) \in \mathcal{A} \times Y \longrightarrow (\gamma + 1) y^\gamma \delta y + \delta \gamma y^{\gamma+1} \text{Log } y$$

• En tout point $\gamma \in \mathcal{A}_c$ et $y \in Y_c$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y} \in \text{Isom}(Y; F)$.

En effet l'équation

$$(3.71) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} + Az + (\gamma + 1) |y|^\gamma z = \tilde{f} \\ z(0) = \tilde{z}_0 \end{cases}$$

admet pour tout $\tilde{f} \in L^\infty(Q)$ et tout $\tilde{z}_0 \in L^\infty(\Omega)$, une solution $z \in L^2(0, T; V)$, et on a de plus $z \in L^\infty(Q)$ en utilisant un principe de maximum, donc $z \in Y$.

. En tout point $\gamma \in \mathcal{A}_c$, l'équation $\psi(\gamma, y) = (f, y_0)$ (où f, y_0 sont donnés par (3.61)) admet une solution unique $y \in Y$, d'après la 1ère partie de la démonstration.

Le théorème 1.1 s'applique donc et donne le résultat cherché. ■

4.

ETUDE D'UN PROBLEME D'EVOLUTION HYPERBOLIQUE

Nous n'avons pas réussi à faire rentrer les résultats de dérivabilité, concernant les équations d'évolution hyperbolique, ou bien posées du sens de Petrowsky, dans le cadre du théorème des fonctions implicites 1.1.

Nous donnerons donc d'abord une démonstration directe d'un théorème de dérivabilité (§ 4.1) puis nous donnerons une application (§ 4.2) pour montrer que cette théorie n'est pas vide.

4.1Théorème Abstrait.

Soient V et H deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{R}$, avec V dense dans H , H identifié à son dual, injection continue de V dans H . On a alors :

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} V \subset H \subset V' \\ \text{chaque inclusion étant dense} \\ \text{chaque injection étant continue} \end{array} \right.$$

On notera :

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \parallel & \parallel \quad \text{la norme dans } V \\ | & | \quad \text{la norme dans } H \\ \parallel & \parallel_* \quad \text{la norme dans } V' \end{array} \right.$$

Soit D un espace de Hilbert tel que :

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} D \subset V \\ \text{inclusion dense} \\ \text{injection continue} \end{array} \right.$$

On notera :

$$(4.4) \quad \parallel \parallel_D \quad \text{la norme dans } D.$$

Remarque 4.1 : dans la suite, il arrivera que D soit muni de la norme du graphe dans H d'un opérateur A de domaine D . Dans ce cas il sera noté $D(A)$ et la norme correspondante sera $\parallel \parallel_{D(A)}$.

Sauf mention contraire, D sera toujours muni de la norme $\parallel \parallel_D$.

Nous appellerons alors $\mathcal{A}$ un sous-espace de $\mathcal{L}(V; V')$ ayant les propriétés suivantes

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall A \in \mathcal{A} : \\ \text{i) } A = A^* \\ \text{ii) } D \subset D(A) \\ \text{iii) } \underline{\text{l'injection}} \text{ de } D \text{ dans } D(A) \text{ est } \underline{\text{continue}} : \\ \quad \exists \gamma > 0, \forall y \in D, \|y\|_{D(A)} \leq \gamma \|y\|_D, \gamma \underline{\text{dépendant}} \text{ de } A. \end{array} \right.$$

Nous pouvons alors mettre sur $\mathcal{A}$ la norme suivante :

$$(4.6) \quad \|A\| = \sup \left\{ \|A\|_{\mathcal{L}(V, V')}, \|A\|_{\mathcal{L}(D; H)} \right\}$$

Soit alors $\mathcal{A}_c$ la partie de $\mathcal{A}$ définie par :

$$(4.7) \quad \mathcal{A}_c = \left\{ A \mid A \in \mathcal{A}, D(A) = D, \exists \alpha > 0, \forall v \in V, (Av, v) \geq \alpha \|v\|^2 \right\}$$

Nous supposons que $\mathcal{A}_c$ a les propriétés suivantes :

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \underline{\mathcal{A}_c \text{ est ouvert}} : \\ \quad \forall A \in \mathcal{A}_c, \exists \varepsilon > 0, \|\delta A\| \leq \varepsilon \Rightarrow A + \delta A \in \mathcal{A}_c \\ \text{ii) } \forall A \in \mathcal{A}_c, \underline{\text{les normes}} \quad \|\cdot\|_D \text{ et } \|\cdot\|_{D(A)} \text{ sur } D \text{ sont } \underline{\text{équivalentes}} : \\ \quad \exists c_1, c_2 > 0, \forall v \in D, c_1 \|v\|_D \leq (|v|^2 + |Av|^2)^{1/2} \leq c_2 \|v\|_D \end{array} \right.$$

soit : $T \in \mathbb{R}, \quad 0 < T < +\infty.$

Nous poserons :

$$(4.9) \quad Y = \left\{ y \mid y \in C^0([0, T]; H), \frac{dy}{dt} \in C^0([0, T]; V') \right\}$$

muni de la norme :

$$(4.10) \quad \|y\|_Y = \sup_{t \in [0, T]} \left\{ \sup (|y(t)|, \left\| \frac{dy}{dt}(t) \right\|_*) \right\}$$

Donnons nous enfin

$$(4.11) \quad f \in L^2(0, T; H)$$

$$(4.12) \quad y_0 \in V, \quad y_1 \in H$$

on définit une application Φ de $\mathcal{A}_c$ dans Y par :

$$(4.13) \quad \Phi : A \in \mathcal{A}_c \longrightarrow y \in Y \text{ solution de}$$

$$(4.14) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + A y = f \\ y(0) = y_0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = y_1 \end{cases}$$

On a alors le

Théorème 4.1. Avec les hypothèses et notations (4.1) à (4.12), l'application Φ définie en (4.13) est continue et dérivable en tout point de l'ouvert $\mathcal{A}_c$ de $\mathcal{A}$, et l'application dérivée $\Phi'(A)$ au point $A \in \mathcal{A}_c$ est donnée par :

$$(4.15) \quad \Phi'(A) : \delta A \in \mathcal{A} \longrightarrow \delta y \in Y \text{ solution de :}$$

$$(4.16) \quad \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \delta y + A \delta y = - \delta A \cdot \Phi(A) \\ \delta y(0) = 0 \quad \frac{d}{dt} \delta y(0) = 0 \end{cases}$$

Démonstration. Tout d'abord, l'application Φ est bien définie, car sous les hypothèses faites, le système (4.14) admet une solution et une seule dans Y (cf LIONS - MAGENES [19], tome 1, théorème 8.1 p 287).

Remarque 4.2 : en fait on a mieux :

$$(4.17) \quad y \in C^0([0, T]; V), \quad \frac{dy}{dt} \in C^0([0, T]; H)$$

d'après LIONS - MAGENES [19], tome 1, théorème 8.2 p. 296. ■

Donnons nous une fois pour toute $A \in \mathcal{A}_c$, et montrons que Φ est continue et dérivable en ce point.

D'après nos hypothèses, il existe des nombres M, α , $M > \alpha > 0$, tels que :

$$(4.18) \quad \begin{cases} \forall \varphi, \psi \in V : \\ (A \varphi, \psi) \leq M \|\varphi\| \|\psi\| \\ (A \varphi, \varphi) \geq \alpha \|\varphi\|^2 \end{cases}$$

Multiplions les deux membres de la 1ère équation de (4.24) par

$(A + \delta A)^{-1} \Delta y'(t)$ [ce qui a bien un sens, car d'après sa définition (4.23) et la remarque 4.2, on sait que $\Delta y \in C^0(OT; V)$, que $\Delta y' \in C^0(OT; H)$ et que $\Delta y'' \in L^2(OT; V')$]. Il vient :

$$\left(\frac{d^2 \Delta y}{dt^2}, (A + \delta A)^{-1} \Delta y' \right) + ((A + \delta A) \Delta y, (A + \delta A)^{-1} \Delta y') \\ = - (\delta A \cdot y, (A + \delta A)^{-1} \Delta y')$$

soit :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[|\Delta y(t)|^2 + ((A + \delta A)^{-1} \Delta y'(t), \Delta y'(t)) \right] \\ = - (\delta A \cdot y(t), (A + \delta A)^{-1} \Delta y'(t))$$

D'où en intégrant de 0 à t :

$$(4.25) \quad |\Delta y(t)|^2 + ((A + \delta A)^{-1} \Delta y'(t), \Delta y'(t)) = \\ = - 2 \int_0^t (\delta A y(\tau), (A + \delta A)^{-1} \Delta y'(\tau)) d\tau$$

Or on sait que (Théorème de Lax-Milgram et (4.21)) :

$$((A + \delta A)^{-1} u, v) \leq \frac{1}{\alpha - \varepsilon(A)} \|u\|_* \|v\|_* \quad \forall u, v \in V', \quad \forall \delta A \in \mathcal{B}(A) \\ ((A + A)^{-1} u, u) \geq \frac{\alpha - \varepsilon_1(A)}{(M + \varepsilon(A))^2} \|u\|_*^2 \quad \forall u \in V', \quad \forall \delta A \in \mathcal{B}(A)$$

On déduit alors de (4.25) :

$$(4.26) \quad |\Delta y(t)|^2 + \|\Delta y'(t)\|_*^2 \leq c_1 \|\delta A\|^2 \int_0^t \|y(\tau)\|^2 d\tau + c_2 \int_0^t \|\Delta y'(\tau)\|_*^2 d\tau$$

où C_1 et C_2 sont des constantes appropriées. De (4.26), on déduit :

$$\|\Delta y'(t)\|_*^2 \leq c_1 \|\delta A\|^2 \|y\|_{L^2(OT; V)}^2 + c_2 \int_0^t \|\Delta y'(\tau)\|_*^2 d\tau$$

et d'après le lemme de Gronwall :

$$(4.27) \quad \|\Delta y'(t)\|_* \leq c_3 \|\delta A\|^2 \|y\|_{L^2(OT; V)}^2$$

De (4.26) et (4.27) on déduit :

$$(4.28) \quad \|\Delta y(t)\|^2 \leq c_4 \|\delta A\|^2 \|y\|_{L^2(OT; V)}^2$$

ce qui donne finalement :

$$(4.29) \quad \|\Delta y\|_Y \leq c \|\delta A\| \quad \forall \delta A \in \mathcal{B}(A)$$

ce qui prouve bien la continuité de Φ .

2°) L'application Φ est dérivable.

Notons $\Phi'(A)$ l'élément de $\mathcal{L}(\mathcal{A}, Y)$ défini par (4.16) (ce qui est loisible d'après LIONS - MAGENES [19], théorèmes 9.3 et 9.4 et remarque 9.11 p. 311 - 314 du tome 1)

Posons :

$$(4.41) \quad \Phi(A + \delta A) = \Phi(A) + \Phi'(A) \cdot \delta A + \|\delta A\| R(A; \delta A)$$

ce qui définit $R(A; \delta A) \in Y$ pour tout $A \in \mathcal{A}_c, \delta A \in \mathcal{B}(A), \delta A \neq 0$.

Pour prouver que $\Phi'(A)$ est bien la dérivée de Φ en A , il suffira de montrer que $\|R(A; \delta A)\|_Y \rightarrow 0$ quand $\|\delta A\| \rightarrow 0, \delta A \neq 0$.

Or (4.41) s'écrit :

$$(4.42) \quad \Delta y = \delta y + \|\delta A\| R(A; \delta A)$$

où Δy est solution de (4.24) et δy solution de (4.16),

En dérivant (4.42) deux fois par rapport au temps, et compte tenu de (4.24), (4.16) il vient :

$$(4.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} R(A; \delta A) + A R(A; \delta A) = - \frac{\delta A}{\|\delta A\|} \cdot \Delta y \\ R(A; \delta A)(0) = 0 \quad \frac{d}{dt} R(A; \delta A)(0) = 0 \end{array} \right.$$

Pour prouver que $R(A ; \mathcal{S} A) \longrightarrow 0$ avec $\mathcal{S} A$, on va utiliser la remarque 9.7 p. 313 du tome 1 de LIONS - MAGENES [19], qui nous dit que $R(A ; \mathcal{S} A) \longrightarrow 0$ dans Y si le second membre de la 1ère équation de (4.43) tend vers zéro dans $L^2(0, T ; D(A)')$ quand $\mathcal{S} A \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{A}$, A fixé dans $\mathcal{A}_c$.

Or on sait que $\mathcal{S} A \in \mathcal{L}(D ; H)$, et d'après (4.8) ii) on vérifie facilement que cela entraîne :

$$(4.44) \quad \mathcal{S} A \in \mathcal{L}(D(A) ; H) \quad \|\mathcal{S} A\|_{\mathcal{L}(D(A) ; H)} = \frac{1}{C_1} \|\mathcal{S} A\|_{\mathcal{L}(D ; H)} \leq \frac{1}{C_1} \|\mathcal{S} A\|$$

Par transposition, comme $\mathcal{S} A = \mathcal{S} A^*$ on a :

$$(4.45) \quad \mathcal{S} A \in \mathcal{L}(H ; D(A)') \quad \|\mathcal{S} A\|_{\mathcal{L}(H ; D(A)')} \leq \frac{1}{C_1} \|\mathcal{S} A\|$$

d'où

$$\begin{aligned} \left\| -\frac{\mathcal{S} A}{\|\mathcal{S} A\|} \cdot \Delta y \right\|_{L^2(0, T ; D(A)')} &\leq \frac{1}{\|\mathcal{S} A\|} \|\mathcal{S} A\|_{\mathcal{L}(H ; D(A)')} \times \|\Delta y\|_{L^2(0, T ; H)} \\ &\leq \frac{1}{C_1} \|\Delta y\|_{L^2(0, T ; H)} \end{aligned}$$

comme d'après le 1°) on sait que $\Delta y \longrightarrow 0$ dans $L^2(0, T ; H)$ quand $\mathcal{S} A \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{A}$, on en déduit que

$$-\frac{\mathcal{S} A}{\|\mathcal{S} A\|} \cdot \Delta y \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, T ; D(A)')$$

4.2 Application.

Soit :

$$(4.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega \subset \mathbb{R}^n, \text{ ouvert borné, de frontière } \Gamma \text{ variété indéfiniment différentiable,} \\ \text{de dimension } n-1, \Omega \text{ étant localement d'un seul côté de } \Gamma. \end{array} \right.$$

Soit ensuite un entier $m > 0$. Nous poserons :

$$(4.47) \quad V = H_0^m(\Omega), \quad H = L^2(\Omega), \quad V' = H^{-m}(\Omega)$$

$$(4.48) \quad D = H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega).$$

Les espaces V, H, V' sont munis des normes habituelles, D est muni de la norme induite par $H^{2m}(\Omega)$.

Soit :

$$(4.49) \quad \mathcal{A} = \left\{ A \mid A \in \mathcal{L}(V; V'), A = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^p D^p(a_{pq}) D^q, \right. \\ \left. a_{pq} = a_{qp}, a_{pq} \in C^{|\mathbf{p}, \mathbf{q}|}(\bar{\Omega}) \right\}$$

L'espace $\mathcal{A}$ est donc formé des opérateurs elliptiques, à coefficients réguliers, d'ordre inférieur ou égal à $2m$, et autoadjoints.

Il faut vérifier que $\mathcal{A}$ a les propriétés (4.5) i) ii) et iii) :

$$\bullet \quad a_{pq} = a_{qp} \implies A = A^*, \quad \text{d'où (4.5) i)}$$

$$\bullet \quad A \text{ elliptique d'ordre } \leq 2m, \text{ à coefficients réguliers}$$

$$\implies D(A) \supset H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega), \quad \text{d'où (4.5) ii)}$$

$$\bullet \quad \text{Soit } y \in D = H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega). \text{ On vérifie facilement que :}$$

$$(4.50) \quad \|y\|_{D(A)} \leq \left(1 + \sup_{|p| \leq m, |q| \leq |p|} \|a_{pq}\|_{C^{|\mathbf{p}|}(\bar{\Omega})}\right) \|y\|_{H^{2m}(\Omega)}$$

$$\text{d'où (4.5) iii)}$$

$\mathcal{A}$ est alors muni de la norme (4.6), c'est-à-dire :

$$(4.51) \quad \|A\| = \sup \left\{ \|A\|_{\mathcal{L}(H_0^m(\Omega); H^{-m}(\Omega))}, \|A\|_{\mathcal{L}(H^{2m}(\Omega), L^2(\Omega))} \right\}$$

La partie $\mathcal{A}_c$ de $\mathcal{A}$ est alors définie par (4.7). C'est donc ici l'ensemble des opérateurs elliptiques, à coefficients réguliers, d'ordre $2m$, coercifs et autoadjoints.

Il faut vérifier que $\mathcal{A}_c$ a les propriétés (4.8) i) et ii) :

$$\bullet \quad \text{Si } A \in \mathcal{A}_c, \text{ en choisissant la norme de } \delta A \text{ assez petite pour que } A + \delta A \text{ soit encore coercif et d'ordre } 2m, \text{ alors } A + \delta A \text{ appartiendra à } \mathcal{A}_c, \text{ d'où (4.8) i)}$$

. Il faut trouver des constantes c_1 et c_2 telles que

$$(4.52) \quad c_1 \|u\|_{H^{2m}(\Omega)} \leq (|u|^2 + |Au|^2)^{1/2} \leq c_2 \|u\|_{H^{2m}(\Omega)} \quad \forall u \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$$

- l'existence de c_2 découle de la propriété (4.5) iii) (on peut prendre ici la constante de (4.50)).
- l'existence de c_1 résulte de la majoration a priori des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques (LIONS - MAGENES [19], Théorème 5.1 chap. 2 tome 1), qui s'écrit :

$$(4.53) \quad \|u\|_{H^{2m}(\Omega)} \leq c_0 (|Au|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{\Gamma} \|u\|_{H^{2m-1/2}(\Gamma)} + \|u\|_{H^{2m-1}(\Omega)})$$

Or ici $u|_{\Gamma} = 0$; d'autre part on sait que $\forall \eta > 0$, $\exists c(\eta) > 0$ telle que :

$$(4.54) \quad \|u\|_{H^{2m-1}(\Omega)} \leq \eta \|v\|_{H^{2m}(\Omega)} + c(\eta) \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^{2m}(\Omega)$$

En prenant $\eta = \frac{1}{2c_0}$ on déduit de (4.53) et (4.54) :

$$(4.55) \quad \|u\|_{H^{2m}(\Omega)} \leq c (|Au|_{L^2(\Omega)}^2 + |u|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}$$

d'où (4.52) en prenant $c_1 = \frac{1}{c}$.

On est donc bien dans les conditions d'application du théorème 4.1.

Nous définissons ensuite l'espace Λ des coefficients à identifier par :

$$(4.60) \quad \Lambda = \overline{\bigcup_{|p| \leq m, |q| \leq |p|} c^{|p|}(\bar{\Omega})}$$

muni de la norme

$$(4.61) \quad \|\lambda\| = \left\| \{a_{pq}\} \right\| = \sup_{|p| \leq m, |q| \leq |p|} \|a_{pq}\|_{c^{|p|}(\bar{\Omega})}$$

qui en fait un espace de Banach.

On définit ensuite une application de Λ dans $\mathcal{A}$ par :

$$(4.62) \quad \lambda = \{a_{pq}\} \in \Lambda \longrightarrow A(\lambda) = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p(a_{pq}(x) D^q) \in \mathcal{A}$$

(où l'on a posé $a_{pq} = a_{qp}$ dès que $|q| > |p|$), et il est facile de vérifier

que cette application est linéaire continue de Λ dans $\mathcal{A}$.

Etant donnés deux nombres positifs α et M vérifiant

$$(4.63) \quad 0 < \alpha < M$$

On pose

$$(4.64) \quad \Lambda_{\text{adm}} = \left\{ \lambda \mid \lambda \in \Lambda, \quad \|\lambda\| \leq M, \quad \sum_{|p|, |q| = m} (-1)^m a_{pq}(x) \xi^{p+q} \geq \alpha |\xi|^{2m} \right. \\ \left. \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \right\}$$

et on a la propriété (cf. LIONS - MAGENES [19], Théorème 9.2 p. 225 tome 1) :

$$(4.65) \quad \lambda \in \Lambda_{\text{adm}} \longrightarrow A(\lambda) \in \mathcal{A}_c$$

Soient enfin

$$(4.66) \quad \begin{cases} f \in L^2(Q) & Q = \Omega \times]0, T[\\ y_0 \in H_0^m(\Omega), \quad y_1 \in L^2(Q) \end{cases}$$

On a alors le théorème

Théorème 4.2 Avec les hypothèses et notations (4.46) à (4.49), (4.51) (4.60) (4.61) (4.64) et (4.66), la solution

$$(4.67) \quad y \in \left\{ \varphi \mid \varphi \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \frac{d\varphi}{dt} \in C^0([0, T]; H^{-m}(\Omega)) \right\}$$

du système :

$$(4.68) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^p D^p(a_{pq}(x) D^q y) = f & \text{dans } Q \\ \frac{\partial^j y}{\partial t^j} = 0 & j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{sur } \Sigma' \\ y(x, 0) = y_0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = y_1(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

dépend de façon dérivable des coefficients $a_{pq} \in C^{|p, q|}(\bar{\Omega})$ en tout point

$$\lambda = \{a_{pq}\} \in \Lambda_{\text{adm}}.$$

C H A P I T R E I I

IDENTIFICATION DANS LES E.D.P.

	Pages
<u>1. LA METHODE DES MOINDRES CARRES - THEOREMES ABSTRAITS</u>	51
<u>2. APPLICATION AUX EQUATIONS ELLIPTIQUES</u>	
2.1 Observation répartie dans Ω (conditions au bord stables homogènes).	54
2.2 Application.	55
2.3 Observation au bord ($\mathcal{E}$ = opérateur frontière d'ordre $< m$).	58
2.4 Observation répartie dans Ω (conditions au bord stables non homogènes).	60
2.5 Observation ponctuelle.	64
2.6 Observation répartie dans une équation non linéaire.	66
<u>3. APPLICATION AUX EQUATIONS PARABOLIQUES</u>	
3.1 Théorie variationnelle.	69
3.2 Observation répartie dans Q (avec des conditions au bord stables homogènes)	70
3.3 Observation sur la frontière latérale Σ ($\mathcal{E}$ = op. frontière d'ordre $< m$)	78
3.4 Solutions irrégulières de Problèmes Paraboliques.	79
3.5 Observations ponctuelles.	88
3.6 Applications.	92
3.7 Observation répartie dans une équation non linéaire.	95
<u>4. IDENTIFICATION DANS UN PROBLEME D'EVOLUTION HYPERBOLIQUE DU 2ème ORDRE EN t</u> (OBSERVATION REPARTIE)	
4.1 Dérivabilité de la fonction coût.	97
4.2 Application.	98
<u>5. THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE DE LA SOLUTION DU PROBLEME D'IDENTIFICATION</u>	
5.1 Cas d'une équation stationnaire	100
5.2 Cas d'une équation d'évolution	104

1.

LA METHODE DES MOINDRES CARRES - THEOREMES ABSTRAITS

Nous allons d'abord donner un résultat abstrait.

On se place dans le cadre du § 1 du chapitre I, et on se donne en plus un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (espace des observations) ; on note :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \| \cdot \|_{\mathcal{H}} & \text{la norme dans l'espace } \mathcal{H} \\ (\cdot , \cdot)_{\mathcal{H}} & \text{le produit scalaire dans } \mathcal{H} \\ \Lambda_{\mathcal{H}} & = \text{isomorphisme canonique de } \mathcal{H} \text{ sur } \mathcal{H}' \end{array} \right.$$

On se donne ensuite un opérateur d'observation (sans bruit de fond) $\mathcal{C}$, (non nécessairement linéaire), tel que

$$(1.2) \quad \mathcal{C} : Y \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$(1.3) \quad \mathcal{C} \text{ est de classe } C^k \text{ de } Y_{\mathcal{C}} \text{ dans } \mathcal{H}$$

On se donne enfin une observation z_d , élément de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$:

$$(1.4) \quad z_d \in \mathcal{H}$$

On peut alors définir une fonctionnelle des moindres carrés J par :

$$(1.5) \quad J : \mathcal{A}_{\mathcal{C}} \subset \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

avec :

$$(1.6) \quad J(A) = \| \mathcal{C}(\Phi(A)) - z_d \|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall A \in \mathcal{A}_{\mathcal{C}}$$

où $\Phi(A)$, définie par (1.7) Chap I, est de classe C^k d'après le théorème 1.1. du chapitre I. Il résulte alors de (1.3) que J est de classe C^k , et on a le

Théorème 1.1 Avec les hypothèses et notations (1.1) à (1.7) du Chapitre I, et (1.1) à (1.4), la fonctionnelle J définie en (1.5)(1.6) est de classe C^k de l'ouvert $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$. Sa dérivée $J'(A)$ en un point $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ s'exprime par :

$$(1.7) \quad \forall \delta A \in \mathcal{A}, \quad J'(A) \cdot \delta A = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial A}(A, y) \cdot \delta A, \rho \right)_{F, F'}$$

où y est solution du système direct :

$$(1.8) \quad \Psi(A, y) = f$$

et où ρ est solution du système adjoint

$$(1.9) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y}(A, y)^* \rho = -2 \mathcal{C}'(y)^* \Lambda_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}(y) - z_d)$$

Démonstration • Le système (1.8) admet toujours une solution unique d'après (1.6) chapitre I.

• Le système (1.9) admet toujours une solution unique, car $-2 \mathcal{C}'(y)^* \Lambda_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}(y) - z_d)$ est dans Y' et car $\frac{\partial \Psi}{\partial y}(A, y)^* \in \text{Isom}(F, Y')$

puisque $\frac{\partial \Psi}{\partial y}(A, y) \in \text{Isom}(Y; F)$ d'après (1.5) Chap I.

• Calculons la dérivée de J : $\forall \delta A \in \mathcal{A}$ on a :

$$\begin{aligned} J'(A) \cdot \delta A &= 2 (\mathcal{C}'(y) \delta y, \mathcal{C}(y) - z_d)_{\mathcal{H}} \\ &= 2 (\mathcal{C}'(y) \delta y, \Lambda_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}(y) - z_d))_{\mathcal{H}, \mathcal{H}'} \\ &= 2 (\delta y, \mathcal{C}'(y)^* \Lambda_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}(y) - z_d))_{Y Y'} \end{aligned}$$

D'où, compte tenu de (1.9) :

$$\begin{aligned} J'(A) \cdot \delta A &= - (\delta y, \frac{\partial \Psi}{\partial y}(A, y)^* \rho)_{Y Y'} \\ &= (- \frac{\partial \Psi}{\partial y}(A, y) \cdot \delta y, \rho)_{F F'} \end{aligned}$$

D'où compte tenu de (1.10) chap. I :

$$J'(A) \cdot \delta A = (- \frac{\partial \Psi}{\partial A}(A, y) \cdot \delta A, \rho)_{F F'} \quad \blacksquare$$

On suppose ensuite que l'opérateur A dépend, de façon affine continue, d'un paramètre λ appartenant à un espace de Banach Λ , et que l'ensemble des paramètres admissibles est un convexe fermé borné Λ_{adm} de Λ , tel que

$$(1.10) \quad \lambda \in \Lambda_{\text{adm}} \longrightarrow A(\lambda) \in \mathcal{A}_c$$

Alors, $\forall \lambda \in \Lambda_{\text{adm}}$, $J(\lambda)$ a un sens, et nous écrirons par abus :

$$(1.11) \quad J(\lambda) = J(A(\lambda))$$

On se pose alors le problème d'identification sous la forme suivante :

$$(1.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donnés } f \in F \text{ et } z_d \in \mathcal{H}, \text{ trouver } \lambda \in \Lambda_{\text{adm}} \text{ tel que :} \\ J(\lambda) \leq J(\mu) \quad \forall \mu \in \Lambda_{\text{adm}} \end{array} \right.$$

La dérivabilité de J permet d'énoncer une condition nécessaire d'optimalité :

Proposition 1.1 Une condition nécessaire pour que $\lambda \in \Lambda_{\text{adm}}$ soit solution du problème (1.12) est que

$$(1.13) \quad J'(\lambda), (\mu - \lambda) \geq 0 \quad \forall \mu \in \Lambda_{\text{adm}}$$

Démonstration : Soit $\lambda \in \Lambda_{\text{adm}}$ solution de (1.12), $\mu \in \Lambda_{\text{adm}}$ et $0 \leq \theta \leq 1$. Comme Λ_{adm} est convexe on a :

$$(1 - \theta)\lambda + \theta\mu \in \Lambda_{\text{adm}}$$

d'où :

$$J(\lambda) \leq J(\lambda + \theta(\mu - \lambda))$$

soit :

$$\frac{J(\lambda + \theta(\mu - \lambda)) - J(\lambda)}{\theta} \geq 0$$

d'où (1.13) lorsque $\theta \rightarrow 0$ puisque J est dérivable. ■

Le théorème 1.1 nous permettra, dans les applications, de calculer explicitement le gradient de J par rapport aux paramètres λ (cf. § suivants) ce qui permettra de minimiser J numériquement (cf. chap. III) c'est-à-dire de résoudre pratiquement le problème d'identification.

Par contre, cette approche ne nous donne pas de théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème d'identification, car on ne sait rien en général, sur l'existence et l'unicité d'une solution du problème (1.12), la fonctionnelle J n'étant pas convexe (même au voisinage d'un optimum s'il y en a un). Pour des résultats d'existence d'une solution au problème (1.12) dans quelques cas particuliers, utilisant des méthodes de compacité, cf. LIONS [18], MURAT [20]. En outre, dans les applications, Λ ne sera pas réflexif, et on ne peut donc pas utiliser, de façon simple, une méthode de gradient justifiée théoriquement.

On obtiendra cependant, au § 5, des résultats d'existence et d'unicité partiels, par une méthode tout à fait différente de celle exposée ci-dessus.

2.

APPLICATION AUX EQUATIONS ELLIPTIQUES

Nous envisagerons, pour un problème elliptique linéaire d'ordre $2m$, quatre types d'observation

- Observation répartie dans Ω (pour des conditions au bord stables homogènes)
- Observation au bord ($\mathcal{C}$ = opérateur frontière d'ordre $< m$)
- Observation répartie dans Ω (pour des conditions au bord stables non homogènes)
- Observation ponctuelle.

Les deux premiers types d'observation sont linéaires continues sur $H^m(\Omega)$, donc seront justiciables de la théorie variationnelle. Les deux derniers types nécessiteront l'usage des théorèmes de régularité.

Nous interpréterons enfin le théorème 1.1 dans le cas de l'équation elliptique non-linéaire du § 2.5 chap I.

2.1 Observation répartie dans Ω (conditions au bord stables homogènes)

On se place dans le cadre de la théorie variationnelle des équations elliptiques (§ 2.1 chapitre I) ; on a donc, avec les notations du théorème 1.1 :

$$(2.1) \quad \begin{cases} Y = V & Y' = V' \\ F = V' & F' = V \\ \mathcal{A} = \mathcal{L}(V, V') \end{cases}$$

où V et H sont deux espaces de Hilbert vérifiant

$$(2.2) \quad V \subset H \subset V'$$

Le théorème 1.1 s'applique donc, et (1.7), (1.8) (1.9) se récrivent ici :

$$(2.4) \quad \forall \delta A \in \mathcal{L}(V, V') \quad , \quad J'(A) \cdot \delta A = (\delta A y, p)$$

où $y \in V$ est solution de

$$(2.5) \quad A y = f$$

et ou $p \in V$ est solution de

$$(2.6) \quad A^* p = - 2 \mathcal{C}'(y)^* \Lambda_{\mathcal{H}} (\mathcal{C}(y) - z_d)$$

On suppose ici qu'on observe y dans $L^2(\Omega)$. On prendra donc :

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} = H = \mathcal{H}' \\ \wedge_{\mathcal{H}} = \text{identité} \\ \mathcal{C} = \text{injection canonique de } V \text{ dans } H \end{array} \right.$$

On se donne enfin

$$(2.8) \quad z_d \in H$$

La fonctionnelle J s'écrit alors :

$$(2.9) \quad J : A \in \mathcal{A}_c \longrightarrow J(A) = \left| \Phi(A) - z_d \right|_H^2$$

et (2.4) à (2.6) donnent le

Théorème 2.1 Sous les hypothèses (2.1) à (2.6) Chap. I et (2.1) à (2.8), la fonctionnelle J définie en (2.9) est de classe C^∞ de $\mathcal{A}_c$ dans V , et sa dérivée en un point $A \in \mathcal{A}_c$ est donnée par :

$$(2.10) \quad J'(A) \cdot \delta A = (\delta A y, p) \quad \forall \delta A \in \mathcal{A}$$

où y et p sont solutions des systèmes

$$(2.11) \quad A y = f \quad (\text{Système direct})$$

$$(2.12) \quad A^* p = -2(y(A) - z_d) \quad (\text{Système Adjoint})$$

2.2 Application

Nous allons appliquer le théorème précédent en nous plaçant dans le cadre du § 2.2 Chap. I, dont nous reprenons les notations, avec en plus

$$(2.13) \quad z_d \in L^2(\Omega).$$

La fonctionnelle J définie en (2.9) s'écrit alors :

$$(2.14) \quad J(\lambda) = \int_{\Omega} (y(x; \lambda) - z_d(x))^2 dx \quad \forall \lambda \in \Lambda_{\text{adm}}$$

et le théorème 2.1 s'écrit :

Théorème 2.2 Avec les hypothèses et notations (2.12) à (2.21) chap. I, et (2.14), la fonctionnelle J définie en (2.14) dépend de façon C^∞ du coefficient

$$\lambda = (a_{pq}, c_j) \text{ dans } \prod_{|p|, |q| \leq m} L^\infty(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} L^\infty(\Gamma - \Gamma_j), \text{ et en un}$$

point $\lambda = (a_{pq}, c_j) \in \Lambda_{\text{adm}}$, sa dérivée s'écrit, d'après (2.10) à (2.12) :

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} J'(\lambda) \cdot \delta \lambda = \sum_{|p|, |q| \leq m} \int_{\Omega} \delta a_{pq}(x) D^q y D^p p \, dx + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma - \Gamma_j} \delta c_j(x) B_j y B_j p \, d\Gamma \\ \forall \delta \lambda = (\delta a_{pq}, \delta c_j) \in \Lambda \end{array} \right.$$

où y et p sont les solutions faibles, dans $H^m(\Omega)$, de

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq} D^q y) = f_0 \quad \text{dans } \Omega \\ B_j y = 0 \quad \text{sur } \Gamma_j \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \\ - \quad \psi_j y + c_j B_j y = g_j \quad \text{sur } \Gamma - \Gamma_j \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{(Système Direct)} \end{array} \right.$$

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{qp} D^q p) = -2(y - z_d) \quad \text{dans } \Omega \\ B_j p = 0 \quad \text{sur } \Gamma_j \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \\ - \quad \psi_j^* p + c_j B_j p = 0 \quad \text{sur } \Gamma - \Gamma_j \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{(Système adjoint)} \end{array} \right.$$

où $\left\{ \psi_j \right\}_{j=0}^{m-1}$ et $\left\{ \psi_j^* \right\}_{j=0}^{m-1}$ sont définis respectivement par (2.29) et

$$(2.31) \text{ chap. I (ou l'on a fait } B_j' = B_j \quad j = 0, \dots, m-1) \quad \blacksquare$$

Remarque 2.1 : La formule (2.15) montre que, sous réserve d'avoir résolu (2.16) et (2.17), on a explicitement le "gradient" de J par rapport aux coefficients a_{pq} et c_j :

$$(2.18) \quad \frac{\partial J}{\partial a_{pq}} = \begin{cases} D^q y D^p p & \text{si } a_{pq} \text{ est une fonction de } x \text{ sur } \Omega \\ \int_{\Omega} D^q y D^p p \, dx & \text{si } a_{pq} \text{ est une constante sur } \Omega \end{cases}$$

$$(2.19) \quad \frac{\partial J}{\partial c_j} = \begin{cases} B_j y B_j p & \text{si } c_j \text{ est fonction de } x \text{ sur } \Gamma - \Gamma_j \\ \int_{\Gamma - \Gamma_j} B_j y B_j p \, d\Gamma & \text{si } c_j \text{ est une constante sur } \Gamma - \Gamma_j \end{cases}$$

On a ici :

$$(2.20) \quad \begin{cases} a_{pq} \in L^{\infty}(\Omega), \quad \frac{\partial J}{\partial a_{pq}} \in L^1(\Omega) \subset [L^{\infty}(\Omega)]' \\ c_j \in L^{\infty}(\Gamma - \Gamma_j), \quad \frac{\partial J}{\partial c_j} \in L^1(\Gamma - \Gamma_j) \subset [L^{\infty}(\Gamma - \Gamma_j)]' \end{cases}$$

Les résultats (2.18) et (2.19) permettront de minimiser J numériquement (cf. chapitre III).

Exemple 2.1 : Identification d'un coefficient de Transmissivité : (Hydrogéologie)

La diffusion de l'eau dans une nappe souterraine occupant un domaine

Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) est régi par une équation aux dérivées partielles du type :

$$(2.21) \quad - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a(x) \frac{\partial y}{\partial x_i}) = f(x, t)$$

où a est la transmissivité, y la pression de l'eau, et f les débits soutirés.

Les débits soutirés f sont connus en 1ère approximation, la solution y est connue par une campagne de mesure de la pression : on a donc une observation répartie $z_d(x)$, et on veut trouver le coefficient de transmissivité $a(x)$.

Nous supposons z_d assez régulière, par exemple

$$(2.22) \quad z_d \in H^1(\Omega)$$

et nous prendrons, comme conditions aux limites accompagnant (2.21) :

$$(2.23) \quad y = z_d \quad \text{sur } \Gamma$$

En faisant alors le changement de fonction inconnue :

$$(2.24) \quad \tilde{y} = y - z_d$$

$\tilde{y}$ devient solution d'un système elliptique avec condition de Dirichlet homogène ; en appliquant à $\tilde{y}$ le théorème 2.2 et la remarque 2.1, et en posant :

$$(2.25) \quad \Lambda = L^\infty(\Omega), \quad \Lambda_{\text{adm}} = \{a \mid a \in L^\infty(\Omega), \exists \alpha > 0, a(x) \geq \alpha \text{ pp dans } \Omega\}$$

$$(2.26) \quad \forall a \in \Lambda_{\text{adm}}, \quad J(a) = \int_{\Omega} (y - z_d)^2 dx \quad \text{où } y \text{ est solution de (2.21) et (2.23)}$$

il vient :

$$(2.27) \quad \frac{\partial J}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx$$

où y est solution faible de (2.21) (2.23) (Système Direct) et où p est solution faible de

$$(2.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a(x) \frac{\partial p}{\partial x_i}) = -2(y - z_d) \quad \text{dans } \Omega \\ p = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{Système Adjoint})$$

Pour les résultats numériques, cf chap. III, § 1.2, ii). Pour une approche différente de ce même problème, cf Y. EMSSELLEM et G. de MARSILY [8]. ■

2.3 Observation au bord ($\mathcal{C}$ = opérateur frontière d'ordre $< m$)

On se place dans le même cadre qu'aux § 2.1 et § 2.2 (on a donc en particulier (2.4), (2.5) et (2.6)), mais on suppose ici qu'on observe $B_j y$ sur $\Gamma - \Gamma_j$ pour $j = 0, 1, \dots, m-1$. On a donc, en identifiant $L^2(\Gamma - \Gamma_j)$ à son dual :

$$(2.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} = \prod_{j=0}^{m-1} L^2(\Gamma - \Gamma_j) = \mathcal{H}' \\ \Lambda_{\mathcal{H}} = \text{identité} \\ \mathcal{C} = \{ B_0, B_1, \dots, B_{m-1} \} \end{array} \right.$$

On se donne enfin :

$$(2.30) \quad z_{d_j} \in L^2(\Gamma - \Gamma_j) \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

La fonctionnelle J s'écrit alors

$$(2.31) \quad J : \lambda \in \Lambda_{\text{adm}} \longrightarrow J(\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma - \Gamma_j} (B_j \Phi(\lambda) - z_{d_j})^2 d\Gamma$$

et (2.4) à (2.6) donnent le

Théorème 2.3 Avec les hypothèses et notations (2.12) à (2.21) Chap. I, et (2.30), la fonctionnelle J définie en (2.31) est de classe C^∞ de Λ_{adm} dans $\mathbb{R}$, et sa dérivée en un point $\lambda = (a_{pq}, c_j) \in \Lambda_{\text{adm}}$ est donnée par (2.15), où y est la solution faible, dans $H^m(\Omega)$, de (2.16) et où p est la solution faible de :

$$(2.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p(a_{pq} D^q p) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ B_j p = 0 \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{sur } \Gamma_j \\ - \psi_j^* p + c_j B_j p = -2 (B_j y - z_{d_j}) \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{sur } \Gamma - \Gamma_j \end{array} \right.$$

où $\left\{ \psi_j^* \right\}_{j=0}^{m-1}$ est adjoint, par rapport à l'opérateur $A^*(\lambda)$ et à la formule de Green, du système $\left\{ B_j \right\}_{j=0}^{m-1}$.

Démonstration : (2.4) peut se récrire, compte tenu du fait que $A \in \mathcal{L}(V, V')$ dépend de $\lambda \in \Lambda$:

$$\begin{aligned} \forall \delta \lambda \in \Lambda, \quad J'(\lambda), \delta \lambda &= (\delta A y, p) \\ &= \delta a(y, p) \end{aligned}$$

où δa est la variation de la forme bilinéaire $a(\lambda, u, v)$ définie par (2.16) chap. I, ce qui donne bien (2.15).

Ensuite (2.5), avec les hypothèses faites, donne (2.16).

Enfin (2.6) s'écrit :

$$(A^* p, v) = -2(\mathcal{L}^* \wedge_{\mathcal{H}} (\mathcal{L} y - z_d), v) \quad \forall v \in V$$

soit (en posant $a^*(u, v) = a(v, u)$) :

$$\begin{aligned} a^*(p, v) &= -2(\mathcal{L} y - z_d, \mathcal{L} v)_{\mathcal{H}} \\ &= -2 \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma - \Gamma_j} (B_j y - z_{d_j}) B_j v \, d\Gamma \end{aligned}$$

Ce qui montre que p est la solution du problème variationnel

$$a^*(p, v) = (\tilde{f}, v) \quad \forall v \in V$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f} \quad \text{du type (2.20) chap. I} \quad \text{avec} \quad f_0 = 0, \quad g_j = -2(B_j y - z_{d_j}) \\ a^* \quad \text{se déduit de } a \text{ en permettant } p \text{ et } q \end{array} \right.$$

d'où (2.32) ■

(Même remarque qu'après le théorème 2.2) .

2.4 Observation répartie dans Ω (conditions du bord stables non homogènes)

La théorie Hilbertienne sera nécessaire ici du fait des conditions au bord stables non homogènes.

Nous nous plaçons donc dans les hypothèses du § 2.4 du chapitre I, où nous prenons le degré de régularité minimum :

$$(2.33) \quad r = 0$$

On aura donc ici, dans les notations du § 1 :

$$(2.34) \quad Y = H^{2m}(\Omega), \quad F = L^2(\Omega) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{2m-m_j - \frac{1}{2}}(\Gamma_j)$$

En identifiant $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Gamma)$ à leurs duaux, F' s'écrit :

$$(2.35) \quad F' = L^2(\Omega) \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{m-1} H^{-2m+m_j+\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)$$

Nous prenons ensuite comme espace et opérateur d'observation :

$$(2.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} = L^2(\Omega) = \mathcal{H}' \\ \Lambda_{\mathcal{H}} = \text{identité} \\ \mathcal{C} = \text{injection de } H^2(\Omega) \text{ dans } L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

On prend enfin :

$$(2.37) \quad z_d \in L^2(\Omega)$$

Le théorème 1.1 s'applique alors, et il faut interpréter (1.7) à (1.9) dans le cas particulier présent (remarquer que ce qu'on appelle A dans le théorème 1.1 correspond en fait à l'opérateur $\mathcal{P}$ du § 2.4 du chapitre I), ce qui donne le

Théorème 2.4 Avec les hypothèses et notations du § 2.4 du chapitre I, et (2.33), (2.36) (2.37), la fonctionnelle J définie par :

$$(2.38) \quad \mathcal{P} \in \mathcal{A}_c \longrightarrow J(\mathcal{P}) = \int_{\Omega} (y(x) - z_d(x))^2 dx$$

est de classe C^∞ de l'ouvert $\mathcal{A}_c$ dans $\mathbb{R}$. Sa dérivée $J'(\mathcal{P})$ en un point

$\mathcal{P} = (A, B_j, -\Psi_j + c_j B_j') \in \mathcal{A}_c$ s'exprime par :

$$(2.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \delta \mathcal{P} = (\delta A, \delta B_j, -\delta \Psi_j + \delta c_j B_j') \in \mathcal{A} \\ J'(\mathcal{P}) \cdot \delta \mathcal{P} = \int_{\Omega} \sum_{|p|, |q| \leq m} \delta a_{pq} D^q y D^p p dx + \int_{\Gamma} \sum_{j=0}^{p-1} \delta B_j y \Psi_j^* p d\Gamma \\ \quad + \int_{\Gamma} \sum_{j=p}^{m-1} \delta c_j B_j' y B_j' p d\Gamma \end{array} \right.$$

où y est la solution, dans $H^{2m}(\Omega)$ du système direct (2.53) Chap. I et où p est la solution, dans $H^{2m}(\Omega)$, du système adjoint :

$$(2.40) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A^* p = -2 (y(x) - z_d(x)) & \text{dans } \Omega \\ B_j p = 0 & \text{sur } \Gamma \quad j = 0, \dots, p-1 \\ - \psi_j^* p + c_j B_j' p = 0 & \text{sur } \Gamma \quad j = p, \dots, m-1 \end{array} \right.$$

où A^* est l'adjoint formel de A définit en (2.30) chap. I, et où ψ_j^* est adjoint, par rapport à l'opérateur A^* et à la formule de Green (2.31) chap. I, du système $\{B_0, \dots, B_{p-1}, B_p', \dots, B_{m-1}'\}$,

Démonstration.

Définissons $\rho \in F'$ par :

$$(2.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = (p, q_0, \dots, q_{m-1}) \in F' \quad \text{avec} \\ p \in H^{2m}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \quad \text{solution de (2.40)} \\ q_j \in L^2(\Gamma) \subset H^{-2m+j+\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \text{définie par} \\ q_j = \begin{cases} \psi_j^* p & j = 0, \dots, p-1 \\ B_j' p & j = p, \dots, m-1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Vérifions d'abord que ρ ainsi défini est solution (donc la solution unique) de (1.9).

Soit $u \in H^{2m}(\Omega)$, quelconque. En multipliant la 1ère équation de (2.40) par u et en intégrant sur Ω , il vient :

$$\int_{\Omega} A^* p u \, dx = -2 \int_{\Omega} (y - z_d) u \, dx$$

En utilisant les formules de Green (2.29) et (2.31) chap. I, prises pour $v = p$ il vient, compte tenu de la 2ème équation de (2.40) :

$$\int_{\Omega} p A u \, dx - \int_{\Gamma} \sum_{j=p}^{m-1} \psi_j u B_j' p \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \sum_{j=0}^{p-1} \psi_j^* p B_j u \, d\Gamma$$

$$+ \int_{\Gamma} \sum_{j=p}^{m-1} \psi_j^* p B_j' u \, d\Gamma = -2 \int_{\Omega} (y - z_d) u \, dx$$

ce qui se réécrit, compte tenu de (2.41) :

$$(2.42) \quad \int_{\Omega} p A u \, dx + \sum_{j=0}^{p-1} \int_{\Gamma} q_j B_j u \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \sum_{j=p}^{m-1} q_j (-\psi_j u + c_j B_j' u) \, d\Gamma =$$

$$-2 \int_{\Omega} (y - z_d) u \, dx \quad \forall u \in H^{2m}(\Omega)$$

ce qui est bien exactement (1.9), compte tenu de la définition de Ψ dans le cas présent (cf (2.56) chap I).

Alors (1.7) s'écrit :

$$(2.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \delta \mathcal{P} = (\delta A, \delta B_j, -\delta \psi_j + \delta c_j B_j') \in \mathcal{A}, \\ J'(\mathcal{P}).\delta \mathcal{P} = \int_{\Omega} \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (\delta a_{pq} D^q y) \times p \, dx + \sum_{j=0}^{p-1} \int_{\Gamma} \delta B_j y \, \psi_j^* p \, d\Gamma \\ \quad + \sum_{j=p}^{m-1} \int_{\Gamma} (-\delta \psi_j y + \delta c_j B_j' y) B_j' p \, d\Gamma \end{array} \right.$$

ce qui, compte tenu de la formule de Green (2.29) Chapitre I prise pour $A = \delta A$, $u = y$ et $v = p$, donne exactement (2.39). ■

Remarque 2.2 :

Même type de remarque qu'après le théorème 2.2 ■

2.5 Observation ponctuelle.

Ici l'usage de la théorie Hilbertienne sera nécessaire, car, pour qu'une observation ponctuelle ait un sens, il faut que l'espace des états soit inclus dans un espace de fonctions continues.

On se place donc dans les hypothèses du § 2.4 du chapitre I, où l'on choisit le degré de régularité r tel que

$$(2.44) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \text{ entier} \\ \frac{n}{2} - 2m < r < 1 + (\frac{n}{2} - 2m) \end{array} \right.$$

ce qui nous assure que toute fonction $y \in H^{2m+r}(\Omega)$ est presque partout égale à une fonction de $C(\bar{\Omega})$, l'injection étant continue de $H^{2m+r}(\Omega)$ dans $C(\bar{\Omega})$ muni de la norme de la convergence uniforme sur le compact $\bar{\Omega}$. (Ω est supposé borné), ce qu'on écrira en abrégé :

$$(2.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = H^{2m+r}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}) \\ \text{injection continue} \end{array} \right.$$

Nous pouvons alors observer la valeur de la solution y en un nombre fini de points :

$$(2.46) \quad x_1, x_2, \dots, x_k \in \Omega$$

d'où comme espace et comme opérateur d'observation :

$$(2.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} = \mathbb{R}^k = \mathcal{H}' \\ \Lambda_{\mathcal{H}} = \text{identité} \\ \mathcal{C} : y \in H^{2m+r}(\Omega) \longrightarrow \{ y(x_1), \dots, y(x_k) \} \in \mathbb{R}^k \end{array} \right.$$

$\mathcal{C}$ est continue d'après (2.45). On se donne enfin une observation :

$$(2.48) \quad z_{d_i} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

La fonctionnelle des moindres carrés J définie en (1.6) devient ici :

$$(2.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} J : \mathcal{P} = (A, B_j, -\Psi_j + c_j B_j') \in \mathcal{A}_c \subset \mathcal{A} \\ \longrightarrow J(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k (y(x_i) - z_{d_i})^2 \end{array} \right.$$

où y est la solution de (2.53) chap. I.

Le Théorème 1.1 s'applique alors et donne :

Théorème 2.5 : Avec les hypothèses et notations du § 2.4, chapitre I, et (2.44) (2.46) (2.47) (2.48), la fonctionnelle J définie en (2.49) est de classe C^∞ de l'ouvert $\mathcal{A}_c$ dans $\mathbb{R}$; sa dérivée $J'(\mathcal{P})$ en un point

$$\mathcal{P} = (A, B_j, -\Psi_j + c_j B_j') \in \mathcal{A}_c \quad \text{s'exprime par :}$$

$$(2.50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \delta \mathcal{P} = (\delta A, \delta B_j, -\delta \Psi_j + \delta c_j B_j') \in \mathcal{A}, \\ J'(\mathcal{P}).\delta \mathcal{P} = (\delta A, y, p) + \sum_{j=0}^{p-1} (\delta B_j, y, q_j) + \sum_{j=p}^{m-1} (-\delta \Psi_j, y + \delta c_j B_j', q_j) \end{array} \right.$$

où $y \in H^{2m+r}(\Omega)$ est la solution de (2.53) chap. I (Système Direct) et où

$$p = (p, q_j \ j = 0, 1, \dots, m-1) \in [H^r(\Omega)]' \oplus \left[\bigoplus_{j=0}^{m-1} H^{-2m-r+m+j+\frac{1}{2}}(\Gamma) \right] \text{ est}$$

la solution de :

$$(2.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} (p, Av) + \sum_{j=0}^{p-1} (q_j, B_j v) + \sum_{j=p}^{m-1} (q_j, -\Psi_j v + c_j B_j' v) = -2 \sum_{i=1}^k (y(x_i) - z_{d_i}) v(x_i) \\ \forall v \in H^{2m+r}(\Omega) \quad (\text{Système adjoint}) \end{array} \right.$$

Formellement, (2.50) peut se réécrire comme (2.39), et (2.51) comme :

$$(2.52) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^* p = -2 \sum_{i=1}^k \delta(x - x_i) (y(x_i) - z_{d_i}) \text{ dans } \Omega \\ B_j p = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad j = 0, 1, \dots, p-1 \\ -\Psi_j^* p + c_j B_j' p = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad j = p, \dots, m-1 \end{array} \right.$$

Démonstration : (2.50) , (2.53) chap. I, et (2.51) ne sont que (1.7) , (1.8) et (1.9) écrites dans un cas particulier.

Prenons ensuite $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans (2.51) on trouve que p vérifie la 1ère équation de (2.52) (au sens des distributions). En multipliant cette équation par v et en intégrant sur Ω , il vient en appliquant (formellement) la formule de Green :

$$\begin{aligned} 0 = & - \sum_{j=0}^{p-1} \int_{\Gamma} (q_j - \Psi_j^* p) B_j v \, d\Gamma + \sum_{j=p}^{m-1} \int_{\Gamma} (q_j - B_j' p) \Psi_j v \, d\Gamma \\ & - \sum_{j=0}^{p-1} \int_{\Gamma} B_j p \Psi_j v \, d\Gamma - \sum_{j=p}^{m-1} \int_{\Gamma} (-\Psi_j^* p + c_j q_j) B_j' v \, d\Gamma \quad \forall v \end{aligned}$$

que l'on peut satisfaire en prenant $q_j = \Psi_j^* p$ ($j = 0, 1, \dots, p-1$) et $q_j = B_j' p$ ($j = p, \dots, m-1$) , et en imposant à p les conditions des 2ème et 3ème équations de (2.52). ■

Remarque 2.3 : quand $n < 4m$, ce qui sera le cas dans les applications pratiques, (2.44) est satisfaite en prenant $r = 0$. Alors l'état adjoint p est un élément de $L^2(\Omega)$ (on suppose toujours $L^2(\Omega)$ identifié à son dual) , et on peut donner un sens rigoureux au système (2.52) (cf LIONS - MAGENES [19]) . Par contre, même ici, (2.39) reste formelle. ■

Remarque 2.4 : même type de remarque qu'après le théorème 2.2. ■

2.6 Observation répartie dans une équation non linéaire

On considère l'équation non linéaire du § 2.5 du chapitre I , soit :

$$(2.53) \quad \begin{cases} - \Delta y + y + e^{\alpha y} = f & \text{dans } \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

dans laquelle on désire identifier la fonction $\alpha(x)$ sur le vu d'une observation $z_d(x)$, répartie par exemple, de la solution y de (2.53) . On appliquera pour cela la théorie du § 1 où l'on prendra $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_c$, Υ , F et Ψ donnés

par (2.71) (2.72) (2.73) (2.74) et (2.78) chapitre I, et :

$$(2.54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} = L^2(\Omega) = \mathcal{H}' \\ \Lambda_{\mathcal{H}} = \text{identité} \\ \mathcal{C} = \text{injection canonique de } L^\infty(\Omega) \text{ dans } L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

La fonctionnelle J des moindres carrés est alors donnée par

$$(2.55) \quad J(\alpha) = \int_{\Omega} |y(x; \alpha) - z_d(x)|^2 dx \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}_c$$

et le théorème 1.1 s'écrit

Théorème 2.6 Avec les hypothèses et notations (2.70) à (2.74) du chapitre I, la fonctionnelle J définie en (2.55) est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathcal{A}_c$ de $\mathcal{A}$; sa dérivée en un point $\alpha \in \mathcal{A}_c$ est l'application linéaire $J'(\alpha)$

donnée par :

$$(2.56) \quad J'(\alpha) \cdot \delta\alpha = \int_{\Omega} \delta\alpha y p e^{\alpha y} dx \quad \forall \delta\alpha \in \mathcal{A}$$

où $y \in Y$ est la solution de (2.53) (Système Direct) et où p est la solution de

$$(2.57) \quad \left\{ \begin{array}{l} p \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ - \Delta p + p + \alpha e^{\alpha y} p = -2(y - z_d) \quad \text{dans } \Omega \\ p = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad \text{(Système Adjoint)}$$

En outre, si on prend $z_d \in L^\infty(\Omega)$, on a :

$$(2.58) \quad p \in Y \quad \text{et} \quad \frac{\partial J}{\partial \alpha} \in L^\infty(\Omega) = \mathcal{A}$$

Démonstration : Le théorème 1.1 s'écrit ici :

$$(2.59) \quad J'(\alpha) \cdot \delta\alpha = \langle \rho, \delta\alpha y e^{\alpha y} \rangle$$

($\langle, \rangle$ désigne ici la dualité entre $[L^\infty(\Omega)]'$ et $L^\infty(\Omega)$)

où $\rho \in [L^\infty(\Omega)]'$ est l'unique solution de :

$$(2.60) \quad \langle p, -\Delta v + v + \alpha e^{\alpha y} v \rangle = -2 \int_{\Omega} (y - z_d) v \, dx \quad \forall v \in Y$$

Or il est facile de voir que l'équation (2.57) admet une solution unique

$p \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^1(\Omega) \subset [L^\infty(\Omega)]'$, et que cette solution

vérifie (2.60). On peut donc prendre

$$(2.61) \quad p = p$$

et (2.56) découle alors de (2.59).

Enfin, dans le cas où $z_d \in L^\infty(\Omega)$, on montre à l'aide de (2.57) et d'un principe du maximum, que $p \in L^\infty(\Omega)$, d'où (2.58). ■

Remarque 2.5 : même type de remarque qu'après le théorème 2.2 ■

Remarque 2.6 : si $n \leq 3$, on peut considérer des observations ponctuelles en k points $x_1, \dots, x_k$ de Ω . On a encore (2.56) où $p \in L^2(\Omega)$ est la solution de :

$$(2.62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} p \times (-\Delta v + v + \alpha e^{\alpha y} v) \, dx = -2 \sum_{i=1}^k (y(x_i) - z_{d_i}) v(x_i) \\ \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{array} \right.$$

c'est-à-dire vérifie

$$(2.63) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta p + p + \alpha e^{\alpha y} p = -2 \sum_{i=1}^k \delta(x - x_i) (y(x_i) - z_{d_i}) \text{ dans } \Omega \\ p = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

3.

APPLICATION AUX EQUATIONS PARABOLIQUES

Nous distinguerons, pour un problème parabolique

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + A y = f \\ + \text{conditions aux limites et conditions initiales} \end{array} \right.$$

où A est un opérateur elliptique d'ordre $2m$, quatre types d'observation :

- Observation répartie dans Q (avec des conditions au bord stables homogènes)
- Observation sur la frontière latérale Σ ($\mathcal{C}$ = op. frontière d'ordre $< m$)
- Observation répartie dans Q (avec des conditions au bord stables non homogènes)
- Observation ponctuelle

Les deux premiers types d'observation sont linéaires continus sur $W(0, T)$, donc justiciable de la théorie variationnelle. Les deux derniers nécessiteront l'usage de la théorie Hilbertienne.

Nous terminerons en étudiant l'identification de γ dans le système non linéaire du § 3.5 du chapitre I.

3.1 Théorie variationnelle

On se place dans le cadre du § 3.1 du chapitre I :

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{A}_c \text{ définis par (3.1) et (3.4) chapitre I} \\ Y \text{ et } F \text{ définis par (3.2) et (3.3) chapitre I} \\ \Psi \text{ et } \Phi \text{ définis par (3.6) et (3.7) chapitre I} \end{array} \right.$$

Pour l'observation, on se place dans le cas particulier où

$$(3.2) \quad \mathcal{C} \in \mathcal{L}(L^2(0, T; V); \mathcal{H})$$

Le théorème 1.1 donne alors :

Théorème 3.1 Avec les hypothèses et notations (3.1) et (3.2), la fonctionnelle J définie par (1.6) est de classe C^∞ de l'ouvert $\mathcal{A}_c$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$, sa dérivée $J'(A)$ au point $A \in \mathcal{A}_c$ est donnée par :

$$(3.3) \quad \forall \delta A \in \mathcal{A}, \quad J'(A) \cdot \delta A = \int_0^T (\delta A(t) y(t), p(t))_{V'V} dt$$

où $y \in Y$ est solution du système direct :

$$(3.4) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} + A(t) y = f(t) & \text{pp. sur }]0, T[\\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

et où l'état adjoint $p \in Y$ est solution du système adjoint :

$$(3.5) \quad \begin{cases} -\frac{dp}{dt} + A^*(t) p = -2 \mathcal{E}^* \wedge_{\mathcal{H}} (\mathcal{E} y - z_d) \\ p(T) = 0 \end{cases}$$

où $A^*(t)$ est, pour $t \in]0, T[$, l'adjoint de $A(t)$.

Remarque 3.1 : On peut facilement considérer une observation finale ; il suffit de remplacer (3.2) par :

$$(3.6) \quad \begin{cases} \mathcal{H} = H = \mathcal{H}', \quad \wedge_{\mathcal{H}} = \text{identité}, \quad z_d \in H \\ \mathcal{E} = \text{"trace à l'instant } T", \text{ linéaire continue de } W(0, T) \text{ dans } H \end{cases}$$

et (3.5) par :

$$(3.7) \quad \begin{cases} -\frac{dp}{dt} + A^*(t) p = 0 \\ p(T) = -2 (y(T) - z_d) \end{cases}$$

moyennant quoi le théorème 3.1 reste vrai. ■

3.2 Observation répartie (conditions au bord stables homogènes)

Hypothèses et notations du § 3.2 chapitre I.

On prend une observation dans $L^2(Q)$:

$$(3.8) \quad \begin{cases} \mathcal{H} = L^2(Q) \\ \wedge_{\mathcal{H}} = \text{identité} \quad z_d \in L^2(Q) \\ \mathcal{E} = \text{injection de } W(0, T) \text{ dans } L^2(Q) \end{cases}$$

$\wedge$ et $\wedge_{\text{adm}}$ étant donnés par (3.12) et (3.15) du chapitre I,

$J(\lambda) = J(A(\lambda))$ est donné par :

$$(3.9) \quad J(\lambda) = \int_Q (y(x, t; \lambda) - z_d(x, t))^2 dx dt \quad \forall \lambda \in \Lambda_{\text{adm}}$$

et le théorème 3.1 s'écrit :

Théorème 3.2 : Sous les hypothèses et avec les notations du § 3.2 Chap. I , ainsi que (3.8) , la fonctionnelle J définie en (3.9)) est de classe C^∞ de Λ_{adm} dans $\mathbb{R}$, et sa dérivée $J'(\lambda)$ au point $\lambda \in \Lambda_{\text{adm}}$ est donnée par :

$$(3.10) \quad J'(\lambda) \cdot \delta\lambda = \sum_{|p|, |q| \leq m} \int_Q \delta a_{pq} D^q y D^p p dx dt + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\sum - \sum_j} \delta c_j(x, t) B_j y B_j p dx dt$$

$$\forall \delta\lambda = (\delta a_{pq}, \delta c_j) \in \Lambda$$

où y et p sont les solutions faibles de

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} + \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq}(x, t) D^q y) = f_0(x, t) \quad \text{dans } Q \\ B_j y = 0 \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{sur } \sum_j \\ - \psi_j y + c_j(x, t) B_j y = g_j(x, t) \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{sur } \sum - \sum_j \\ y(x, 0) = y_0(x) \quad (\text{Système Direct}) \end{array} \right.$$

et de :

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{qp}(x, t) D^q p) = -2(y(x, t) - z_d(x, t)) \quad \text{dans } Q \\ B_j p = 0 \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{sur } \sum_j \\ - \psi_j^* p + c_j(x, t) B_j p = 0 \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \sum - \sum_j \\ p(x, T) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{Système Adjoint}) \end{array} \right.$$

Remarque 3.2 (cf. aussi remarque 2.1). La formule (3.10) montre que sous réserve d'avoir résolu les systèmes (3.11) et (3.12), on a explicitement le "gradient" de J par rapport aux coefficients a_{pq} et c_j :

$$(3.13) \quad \frac{\partial J}{\partial a_{pq}} = \begin{cases} D^q y D^p p & \text{si } a_{pq} \text{ dépend de } x \text{ et } t \\ \int_0^T D^q y D^p p \, dt & \text{si } a_{pq} \text{ ne dépend que de } x \\ \int_Q D^q y D^p p \, dx \, dt & \text{si } a_{pq} \text{ est une constante} \end{cases}$$

$$(3.14) \quad \frac{\partial J}{\partial c_j} = \begin{cases} B_j y B_j p & \text{si } c_j \text{ dépend de } x \text{ et } t \\ \int_0^T B_j y B_j p \, dt & \text{si } c_j \text{ ne dépend que de } x \\ \int_{\Sigma - \sum_j} B_j y B_j p \, dx \, dt & \text{si } c_j \text{ est une constante} \end{cases}$$

Les formules (3.13) et (3.14) permettront de minimiser J numériquement (cf chap. III). On retrouve ici, dans le cas où a_{pq} dépend de t , un algorithme proposé par Y. KAWAMOTO et J. VIDAL [12] ainsi que VENKATESWARARAO VEMURI et WALTER J. KARPLUS [27].

Exemple 3.1 : Chauffage d'un corps par un courant d'air chaud

Ici Ω représente le volume occupé par le corps à chauffer, et $y(x,t)$ la température du corps au point x et à l'instant t . Si $a(x)$ représente le coefficient thermique du corps au point x de Ω , et si $\alpha(x)$ est le coefficient de flux au point x de Γ , l'évolution de la température y est donné par l'équation :

$$(3.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = \alpha(x) (y - \varphi) \\ y(x,0) = y_0(x) \end{array} \right.$$



Air chaud

où $\varphi(x,t)$ représente la température du gaz chauffant au point x de Γ à l'instant t , et où $y_0(x)$ représente la température initiale.

En pratique, y_0 , φ et $a(x)$ sont connus, mais $\alpha(x)$ est mal connu, et on a besoin de l'identifier.

De tels problèmes interviennent en pratique lors du traitement thermique de tôles en rouleaux [les tôles occupant le volume Ω sont chauffées par de l'air chaud à la température φ , et ont veu que tous les points de la tôle atteignent une température T_0 fixée à l'avance : combien de temps faut-il chauffer ? Il suffit pour pouvoir répondre de connaître le modèle (3.15), donc d'avoir identifié α]. Pour une autre approche du problème, cf BERTRAN [4], KURT [11] .

Nous supposons donc ici que l'on peut mesurer la température à chaque instant en chaque point du corps (ce qui est irréaliste. Pour un point de vue plus réaliste, cf. Exemples 3.3, 3.4), d'où une observation $z_d(x,t)$ et une fonction coût J du type (3.9). Le coefficient $a(x)$ étant connu, et $a(x) \geq \alpha > 0$, on peut remplacer la fonction inconnue de $\alpha(x)$ par :

$$(3.16) \quad c_0(x) = -a(x) \alpha(x)$$

et le système (3.15) devient

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + c_0(x) y = c_0(x) \varphi(x,t) \\ y(x,0) = y_0(x) \end{array} \right.$$

qui est du type (3.11) à ceci près que y dépend de c_0 , en outre, par le 2e membre de la condition aux limites. La théorie précédente montre, avec des adaptations mineures, qu'à condition de définir l'état adjoint p par (3.12), la dérivée de J s'écrit :

$$(3.18) \quad J'(c_0) \cdot \delta c_0 = \int_{\Gamma} \delta c_0(x) \left[\int_0^T (y - \varphi) p \, dt \right] d\Gamma$$

soit en revenant au coefficient $\alpha(x)$:

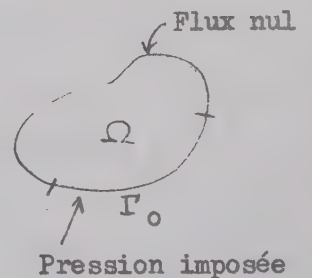
$$(3.19) \quad \frac{\partial J}{\partial \alpha}(x) = -a(x) \int_0^T (y - \varphi) p \, dt \quad \forall x \in \Gamma$$

où y est solution de (3.15) et p solution de

$$(3.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a(x) \frac{\partial p}{\partial x_i}) = -2(y(x,t) - z_d(x,t)) \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = \alpha(x) p \\ p(x,T) = 0 \end{array} \right.$$

Exemple 3.2 : Equation d'une nappe aquifère ($n = 3$)

On considère l'évolution de la pression $y(x,t)$ dans une nappe aquifère dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, les conditions aux limites étant du type pression imposée (Dirichlet non homogène) sur la partie Γ_0 de la frontière Γ de Ω , du type flux nul (Neumann homogène) sur le reste de la frontière.



Si $s(x)$ représente le coefficient d'emmagasinement au point $x \in \Omega$ et $\tau(x)$ représente la transmissité au point $x \in \Omega$, l'équation de la pression $y(x,t)$ est :

$$3.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} s(x) \frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tau(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) = f(x, t) \quad \text{dans } \Omega \\ y(x, t) = g(x, t) \quad \text{sur } \sum_0 \\ \frac{\partial y}{\partial \nu}(x, t) = 0 \quad \text{sur } \sum - \sum_0 \\ y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

où $f(x, t)$ représente le débit échangé entre la nappe et l'extérieur au point x et à l'instant t (puits par exemple...) et où $y_0(x)$ représente la pression initiale de la nappe.

En supposant $g(x, t)$ assez "régulière" et en utilisant un relèvement de l'opérateur de trace, on se ramène au cas de conditions au bord toutes homogènes :

$$3.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} s(x) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tau(x) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x_i} \right) = \tilde{f}(x, t) \quad \text{dans } Q \\ \tilde{y} = 0 \quad \text{sur } \sum_0 \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \sum - \sum_0 \\ \tilde{y}(x, 0) = \tilde{y}_0(x) \quad \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

système qui ne rentre dans le cadre du § 3.2 que lorsque $s(x) = s = \text{cste.}$

Nous donnerons cependant ci-dessous les résultats dans le cas plus général où s dépend de x .

Proposition 3.1. Avec les hypothèses et notations :

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^3 \text{ de frontière } \Gamma \text{ régulière} \\ \Gamma_0 = \text{une partie de } \Gamma \end{array} \right.$$

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} s \in L^\infty(\Omega), \quad \tau \in L^\infty(\Omega) \text{ tels que } \exists s_0, \tau_0 \in \mathbb{R} \text{ avec :} \\ s(x) \geq s_0 > 0, \quad \tau(x) \geq \tau_0 > 0 \text{ pp. dans } \Omega \end{array} \right.$$

$$(3.25) \quad \tilde{f} \in L^2(Q), \quad \tilde{y}_0 \in L^2(\Omega)$$

$$(3.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \{ v \mid v \in H^1(\Omega), \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \} \\ H = L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

$$(3.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(\tau) \mathcal{L}(V; V') \text{ défini par} \\ (A(\tau) u, v) = \int_{\Omega} \tau(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \quad \forall u, v \in V \end{array} \right.$$

le système :

$$(3.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} s \frac{dy}{dt} + A(\tau) y = \tilde{f} \\ y(0) = \tilde{y}_0 \end{array} \right.$$

admet une solution unique y vérifiant :

$$(3.29) \quad y \in W(0, T)$$

et dépendant continuellement des seconds membres $\tilde{y}_0$ et $\tilde{f}$ dans $L^2(\Omega) \times L^2(Q)$.

Démonstration : Elle peut se faire soit directement, en suivant, avec des adaptations évidentes, la démonstration habituelle de l'existence et l'unicité d'une solution au problème d'évolution variationnel (passage à la dimension finie, majoration a priori, passage à la limite), soit en utilisant la théorie

variationnelle habituelle, à laquelle on se ramène en munissant $H = L^2(\Omega)$ du produit scalaire

$$(3.30) \quad (f, g)_s = \int_{\Omega} s(x) f(x) g(x) dx \quad \forall f, g \in L^2(\Omega) \quad \blacksquare$$

On peut maintenant se poser le problème d'identifier les fonctions $s(x)$ et $\tau(x)$ sur le vu d'une observation répartie :

$$(3.31) \quad z_d \in L^2(Q).$$

Si on définit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_c$ par :

$$(3.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} = [L^\infty(\Omega)]^2 \\ \mathcal{A}_c = \left\{ (s, \tau) \mid (s, \tau) \in \mathcal{A}, \exists s_0 > 0, \exists \tau_0 > 0 \quad t_q \right. \\ \left. s(x) \geq s_0 > 0 \text{ et } \tau(x) \geq \tau_0 > 0 \text{ pp. dans } \Omega \right\} \end{array} \right.$$

pour tout $(s, \tau) \in \mathcal{A}_c$, le système (3.28) aura une solution unique $y \in W(0, T)$, et on posera :

$$(3.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (s, \tau) \in \mathcal{A}_c \\ J(s, \tau) = \int_0^T \left| y(t; s, \tau) - z_d(t) \right|_H^2 dt \end{array} \right.$$

et le théorème 1.1 donnera la

Proposition 3.2 : Avec les hypothèses et notations (3.23), (3.25) (3.26) (3.31) (3.32), la fonctionnelle J définie en (3.33) est de classe C^∞ de l'ouvert $\mathcal{A}_c$ de $\mathcal{A}$ à valeur dans $\mathbb{R}$. Sa dérivée $J'(s, \tau)$ en un point $(s, \tau) \in \mathcal{A}_c$ s'écrit :

$$(3.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (\delta s, \delta \tau) \in \mathcal{A}_c \\ J'(s, \tau) \cdot (\delta s, \delta \tau) = \int_{\Omega} \delta s \left[\int_0^T \frac{\partial y}{\partial t} p dt \right] dx + \int_{\Omega} \delta \tau \left[\sum_{i=1}^3 \int_0^T \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} dt \right] dx \end{array} \right.$$

où y est la solution de (3.21) (système Direct) et où p est la solution de :

$$(3.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} -s(x) \frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tau(x) \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = -2 (y(x,t) - z_d(x,t)) \quad \text{dans } Q \\ p = 0 \quad \text{sur } \sum_0 \\ \frac{\partial p}{\partial \nu_A} = 0 \quad \text{sur } \sum - \sum_0 \\ p(x,T) = 0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (\text{Système adjoint})$$

La proposition 3.2 permettra de minimiser la fonctionnelle J numériquement. Pour les résultats numériques de l'identification de τ seul ($s(x) = 1 = \text{cste}$) cf chap. III. ■

3.3 Observation sur la frontière latérale

Hypothèses et notations du § 3.2 chap. I. On prend ici comme observations les fonctions $B_j y$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ dans $L^2(\sum - \sum_j)$:

$$(3.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} = \prod_{j=0}^{m-1} L^2(\sum - \sum_j), \quad z_{dj} \in L^2(\sum - \sum_j) \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \\ \Lambda_{\mathcal{H}} = \text{identité} \\ \mathcal{C} = \{ B_0, B_1, \dots, B_{m-1} \} \end{array} \right.$$

Λ et Λ_{adm} étant donnés par (3.12) et (3.15) chap. I, $J(\Lambda(\lambda)) = J(\lambda)$ est donné par :

$$(3.37) \quad J(\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\sum - \sum_j} (B_j y(x,t) - z_{dj}(x,t))^2 \, d\mathbf{r} \, dt \quad \forall \lambda \in \Lambda_{\text{adm}}$$

et le Théorème 3.1 s'écrit ici :

Théorème 3.3 : Sous les hypothèses et avec les notations du § 3.2 chap. I,

ainsi que (3.36), la fonctionnelle $J(\lambda)$ définie en (3.37) est de classe C^∞ de Λ_{adm} dans $\mathbb{R}$, et sa dérivée $J'(\lambda)$ au point $\lambda \in \Lambda_{\text{adm}}$ est donnée par (3.10), où y et p sont les solutions faibles de (3.11) et de :

$$(3.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p(a_{qp}(x, t) D_p^q) = 0 \quad \text{dans } Q \\ B_j p = 0 \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{sur } \sum_j \\ - \Psi_j^* p + c_j(x, t) B_j p = -2(B_j y - z_{d_j}) \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{sur } \sum - \sum_j \\ p(x, T) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

Remarque 3.3 : comme remarque 3.2

Exemple 3.3 : comme l'exemple 3.1, sauf que l'on n'observe la température du corps que sur sa surface extérieure Γ (ce qui est plus réaliste que l'hypothèse de l'observation en tout point, même intérieur, du corps. Pour un point de vue plus réaliste, cf Exemples 3.4), d'où une fonctionnelle J du type (3.37) (où $m = 1$). On a alors encore (3.19), où y est solution de (3.15) et p solution de

$$(3.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a(x) \frac{\partial p}{\partial x_i}) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = \alpha(x) p - \frac{2}{a(x)}(y - z_d) \quad \text{sur le bord } \Gamma \times]0, T[\\ p(x, T) = 0 \end{array} \right.$$

3.4 Solutions irrégulières de Problèmes Paraboliques

(cf LIONS - MAGENES [19], chap. IV § 7 à 12)

Notre but est de traiter les observations ponctuelles, qui correspondent mieux à la réalité que des observations réparties. Nous aurons donc besoin de trouver l'état du système dans un espace plus régulier (ici $H^{2m,1}(Q)$).

Nous nous placerons donc dans le cadre du § 3.4 du chapitre I :

$$(3.40) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{A} \text{ et } \mathcal{A}_c & \text{donnés par (3.45), (3.46) et (3.47) chapitre I} \\ Y \text{ et } F & \text{donnés par (3.51) et (3.52) du chap. I} \\ \Psi & \text{donnés par (3.53) chap. I} \end{array} \right.$$

La contrepartie sera que l'état adjoint $\rho \in F'$ introduit par le théorème 1.1. sera irrégulier. Pour pouvoir interpréter cet état adjoint ρ , nous aurons donc besoin de quelques rappels qui font l'objet de ce paragraphe.

Nous supposons dans ce paragraphe que Γ est une variété différentiable de classe C^∞ , afin de ne pas alourdir l'exposé des résultats. Mais le théorème principal (théorème 3.4) reste valable si on suppose seulement Γ de classe C^{2m} comme dans (3.22) chap. I.

Donnons nous :

$$(3.41) \quad (A, B_j, j = p, \dots, m-1) \in \mathcal{A}_c$$

On sait alors que le système $\left\{ B_j \right\}_{j=0}^{m-1}$ est normal sur Γ .

Choisissons ensuite (ce qui est toujours possible) m opérateurs

$S_j \quad j = 0, 1, \dots, m-1$ d'ordre $\mu_j^{(1)}$, de la forme (3.36) chap. I, tels que

$$(3.42) \quad \text{Le système } \left\{ B_0, \dots, B_{m-1}, S_0, \dots, S_{m-1} \right\} \text{ soit de Dirichlet d'ordre } 2m \text{ sur } \Gamma.$$

On sait alors qu'il existe deux systèmes d'opérateurs frontière $\left\{ C_j \right\}_{j=0}^{m-1}$

et $\left\{ T_j \right\}_{j=0}^{m-1}$, définis de façon unique, tels que :

$$(3.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) Ordre de } C_j = 2m-1 - \mu_j, \text{ ordre } T_j = 2m-1 - m_j \\ \text{ii) } C_j \text{ et } T_j \text{ sont de la forme (3.35) chap I} \\ \text{iii) } \forall u, v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), \quad \forall t \in [0, T] \text{ on ait la formule de Green :} \\ \int_{\Omega} A u, v \, dx = \int_{\Omega} u A^* v \, dx + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma} S_j u C_j v \, d\Gamma - \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma} B_j u T_j v \, d\Gamma \end{array} \right.$$

(¹) On supposera les opérateurs S_j numérotés de la façon suivante :

$$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{p-1} \geq m \text{ et } \mu_p < \mu_{p+1}, \dots, \mu_{m-1} < m$$

On dit alors que $\left\{ C_j \right\}_{j=0}^{m-1}$ est adjoint de $\left\{ B_j \right\}_{j=0}^{m-1}$ par rapport à A et à la formule de Green (3.43).

Remarque 3.4 : Dans les applications, nous utiliserons un cas particulier de cette formule de Green ; soient.

$$(3.44) \quad \left\{ B_j' \right\}_{j=0}^{m-1} \text{ un système de Dirichlet d'ordre } m \text{ sur } \Gamma, (\text{ordre } B_j' = m_j')$$

$$(3.45) \quad \left\{ \psi_j \right\}_{j=0}^{m-1} \text{ (resp. } \left\{ \psi_j^* \right\}_{j=0}^{m-1} \text{) le système (de Dirichlet) adjoint de } \left\{ B_j' \right\}_{j=0}^{m-1}$$

par rapport à A (resp. A^*) et à la formule de Green (2.23) du chapitre I.

$$(3.46) \quad c_j, j = p, \dots, m-1 \quad p \text{ fonctions de } C^{2m-m_j, 2m-m_j+1} \left(\sum \right)$$

Alors si $\left\{ B_j \right\}_{j=0}^{m-1}$ est de la forme :

$$(3.47) \quad B_j = \begin{cases} B_j' & j = 0, 1, \dots, p-1 \\ -\psi_j + c_j B_j' & j = p, \dots, m-1 \end{cases}$$

en choisissant :

$$(3.48) \quad S_j = \begin{cases} -\psi_j & j = 0, 1, \dots, p-1 \\ B_j' & j = p, \dots, m-1 \end{cases}$$

on trouve pour C_j et T_j :

$$(3.49) \quad C_j = \begin{cases} B_j' & j = 0, 1, \dots, p-1 \\ -\psi_j^* + c_j B_j' & j = p, \dots, m-1 \end{cases}$$

$$(3.50) \quad T_j = \begin{cases} -\psi_j^* & j = 0, 1, \dots, p-1 \\ B_j' & j = p, \dots, m-1 \end{cases}$$

Si nous posons :

$$(3.51) \quad X(Q) = \left\{ v \mid v \in H^{2m,1}(Q), B_j v = 0, j = 0, 1, \dots, p-1, v(x, 0) = 0 \right\}$$

Le théorème 3.3 du chapitre I entraîne que :

$$(3.52) \quad \forall (A, B_j \quad j = p, \dots, m-1) \in \mathcal{A}_c, \text{ l'opérateur } \left(\frac{\partial}{\partial t} + A, B_j \quad j = p, \dots, m-1 \right) \text{ est un isomorphisme de } X(Q) \text{ sur}$$

$$L^2(Q) \times \prod_{j=p}^{m-1} H^{2m-m_j-\frac{1}{2}, (2m-m_j-\frac{1}{2})/2m}(\Sigma)$$

On va maintenant transposer cet isomorphisme.

On remarque d'abord que, pour $j \geq p$, on a $(2m-m_j-\frac{1}{2})/2m < \frac{1}{2}$, donc que

$\mathcal{D}(\Sigma)$ est dense dans $H^{2m-m_j-\frac{1}{2}, (2m-m_j-\frac{1}{2})/2m}(\Sigma)$, d'où

$$(3.53) \quad \left[H^{2m-m_j-\frac{1}{2}, (2m-m_j-\frac{1}{2})/2m}(\Sigma) \right]' = H^{-2m+m_j+\frac{1}{2}, (-2m+m_j+\frac{1}{2})/2m}(\Sigma)$$

On a alors la

Proposition 3.3 : Si $(A, B_j \quad j = p, \dots, m-1) \in \mathcal{A}_c$ et si $v \mapsto L(v)$ est une forme linéaire continue sur $X(Q)$, il existe $(p, q_p, \dots, q_{m-1})$ unique appartenant à :

$$(3.54) \quad L^2(Q) \times \prod_{j=p}^{m-1} H^{-2m+m_j+\frac{1}{2}, (-2m+m_j+\frac{1}{2})/2m}(\Sigma)$$

tel que

$$(3.55) \quad \left\langle p, \frac{\partial v}{\partial t} + Av \right\rangle + \sum_{j=p}^{m-1} \langle q_j, B_j v \rangle = L(v) \quad \forall v \in X(Q)$$

Il reste maintenant à choisir $L(v)$ de façon à ce que la solution p puisse s'interpréter comme la solution distribution d'un problème parabolique avec données irrégulières. Nous allons donner les résultats qui, permettent d'arriver à cette interprétation. Pour les détails, on se reportera à LIONS - MAGENES [19] Chap. IV. Dans la suite, $\rho(x)$ sera une fonction de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, positive dans Ω , nulle sur Γ , du même ordre que la distance de x à Γ , et $d(t)$ sera une fonction

de $\mathcal{D}([0, T])$ telle que $d(t) = t$ si $t \leq t_0$ et $d(t) = T - t$ si $t > T - t_0$ (où t_0 est tel que $0 < t_0 < T - t_0 < T$).

On pose alors :

Définition 3.1 :

$$\Xi^{2m,1}(Q) = \left\{ v \mid j = 0, 1, |\alpha| \leq 2(1-j)m, d^j \rho^{|\alpha|} D_t^j D_x^\alpha v \in L^2(Q) \right\}$$

et on a la

Proposition 3.4 :

- a) $\mathcal{D}(Q)$ est dense dans $\Xi^{2m,1}(Q)$
- b) $X(Q) \subset \Xi^{2m,1}(Q)$
- c) $\Xi^{-2m,-1}(Q) = [\Xi^{2m,1}(Q)]' \subset \mathcal{D}'(Q)$

On pose ensuite

Définition 3.2 :

$$D_{P^*}(Q) = \left\{ u \mid u \in L^2(Q), -\frac{\partial u}{\partial t} + A^* u \in \Xi^{-2m,-1}(Q) \right\}$$

et on a les

Propositions 3.5 $\mathcal{D}(\bar{Q})$ est dense dans $D_{P^*}(Q)$ ■

Proposition 3.6 (Théorèmes de trace) Pour tout $j = 0, 1, \dots, m-1$:

- a) L'application $u \longrightarrow C_j u$ de $\mathcal{D}(\bar{Q})$ dans $\mathcal{D}(\bar{\Sigma})$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue :

$$C_j : D_{P^*}(Q) \longrightarrow H^{-2m + \mu_j + \frac{1}{2}, (-2m + \mu_j + \frac{1}{2})/2m}(\bar{\Sigma})$$

- b) L'application $u \longrightarrow T_j u$ de $\mathcal{D}(\bar{Q})$ dans $\mathcal{D}(\bar{\Sigma})$ se prolonge de même par continuité en une application linéaire continue :

$$T_j : D_{P^*}(Q) \longrightarrow H^{-2m + m_j + \frac{1}{2}, (-2m + m_j + \frac{1}{2})/2m}(\bar{\Sigma})$$

- c) L'application $u \longrightarrow u(x, T)$ de $\mathcal{D}(\bar{Q})$ dans $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $D_{P^*}(Q)$ dans $H^{-m}(\Omega)$ ■

Un corollaire des propositions 3.5 et 3.6 et de la formule (3.43) est la
Proposition 3.7 : (Formules de Green)

a) $\forall u \in D_{P^*}^*(Q)$, $\forall v \in H_{,0}^{2m,1}(Q)$, $B_j v = 0$ $j = 0, 1, \dots, p-1$ on a

$$\langle u, P v \rangle = \langle P^* u, v \rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle S_j v, C_j u \rangle - \sum_{j=p}^{m-1} \langle B_j v, T_j u \rangle$$

b) $\forall u \in D_{P^*}^*(Q)$, $\forall v \in H^{2m,1}(Q)$, $v(x, 0) = 0$, $B_j v = S_j v = 0$ $j = 0, 1, \dots, m-1$,

$$\text{on a : } \langle u, P v \rangle = \langle P^* u, v \rangle + \langle u(x, T), v(x, T) \rangle$$

$$\text{où } P = \frac{\partial}{\partial t} + A \quad \text{et } P^* = - \frac{\partial}{\partial t} + A^* \quad \blacksquare$$

Remarque 3.5 : on n'a pas ici de formule de Green globale, car si $v \in H^{2m,1}(Q)$ seulement, $B_j v \in H^{2m-m_j-\frac{1}{2}, (2m-m_j-\frac{1}{2})/2m}(\Sigma)$, et si $j < p$, $(2m-m_j-\frac{1}{2})/2m > \frac{1}{2}$ et les termes $\langle B_j v, T_j u \rangle$ n'ont plus de sens $\blacksquare$

On aura en outre besoin de la

Proposition 3.8 (relèvements)

a) il existe un relèvement $(g_0, \dots, g_{m-1}) \longrightarrow v$, application linéaire continue de

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{2m-\mu_j-\frac{1}{2}, (2m-\mu_j-\frac{1}{2})/2m}(\Sigma) \longrightarrow H_{,0}^{2m,1}(Q)$$

tel que

$$B_j v = 0 \quad S_j v = g_j \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

b) il existe un relèvement $\varphi \longrightarrow v_1$, application linéaire continue de

$$H_0^m(\Omega) \longrightarrow H^{2m,1}(Q)$$

$$\text{tel que } B_j v_1 = S_j v_1 = 0 \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

$$\text{et que } v_1(x, 0) = 0, \quad v_1(x, T) = \varphi(x) \quad \blacksquare$$

Nous avons enfin besoin de la

Définition 3.3

$$H^{2m\alpha} \Xi^\alpha(\Sigma) = \{v \mid 0 \leq j \leq \alpha, d^j D_t^j v \in L^2(0, T; H^{2(\alpha-j/\alpha)m}(\Gamma))\}$$

$$\Xi^m(\Omega) = \{v \mid |\alpha| \leq m, \rho^{|\alpha|} D_x^\alpha v \in L^2(\Omega)\} \quad \blacksquare$$

on a alors la

Proposition 3.9

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} \mathcal{D}(\Sigma) \text{ est dense dans } H^{2m\alpha} \Xi^\alpha(\Sigma) \\ \mathcal{D}(\Omega) \text{ est dense dans } \Xi^m(\Omega) \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} H^{2m-\mu_j-\frac{1}{2}, (2m-\mu_j-\frac{1}{2})/2m}(\Sigma) \subset H^{2m-\mu_j-\frac{1}{2}, (2m-\mu_j-\frac{1}{2})/2m}(\Sigma) \\ H^m(\Omega) \subset \Xi^m(\Omega) \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} H^{-2m+\mu_j+\frac{1}{2}, (-2m+\mu_j+\frac{1}{2})/2m}(\Sigma) = \left[H^{2m-\mu_j-\frac{1}{2}, (2m-\mu_j-\frac{1}{2})/2m}(\Sigma) \right]' \\ \Xi^{-m}(\Omega) = [\Xi^m(\Omega)]' \subset \mathcal{D}'(\Sigma) \end{cases} \end{aligned}$$

\(\subset \mathcal{D}'(\Sigma)\)

\(\Xi^{-m}(\Omega) = [\Xi^m(\Omega)]' \subset \mathcal{D}'(\Omega)\)

\(\blacksquare\)

Les propositions 3.4 et 3.9 et les théorèmes de trace ordinaire sur $H^{2m,1}(Q)$ permettent de prouver la :

Proposition 3.10 Soient

$$(3.56) \quad \begin{cases} f \in \Xi^{-2m,-1}(Q) \\ h_j \in H^{-2m+\mu_j+\frac{1}{2}, (-2m+\mu_j+\frac{1}{2})/2m}(\Sigma) \quad j = p, \dots, m-1 \\ u_T \in \Xi^{-m}(\Omega) \end{cases}$$

Alors la forme linéaire :

$$(3.57) \quad v \longrightarrow L(v) = \langle f, v \rangle + \sum_{j=p}^{m-1} \langle h_j, S_j v \rangle + \langle u_T, v(x, T) \rangle$$

est linéaire continue sur $X(Q)$ \(\blacksquare\)

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de prouver le théorème principal :

Théorème 3.4. Hypothèses du § 3.4 chap. I. Pour tout $(A, B_j \ j = p, \dots, m-1) \in \mathcal{J}_c^t$

$\{S_j\}_{j=0}^{m-1}$ de la forme (3.36 chap. I) et vérifiant (3.42), pour toutes les distributions f, h_j et u_T vérifiant (3.56), il existe $(p, q_p, \dots, q_{m-1})$ unique vérifiant

$$(3.58) \left\{ \begin{array}{l} p \in L^2(Q) \\ q_j \in H^{-2m+m_j+\frac{1}{2}, (-2m+m_j+\frac{1}{2})/2m}(\Sigma) \quad j = p, \dots, m-1 \\ \langle p, \frac{\partial v}{\partial t} + A v \rangle + \sum_{j=p}^{m-1} \langle q_j, B_j v \rangle = \\ = \langle f, v \rangle + \sum_{j=p}^{m-1} \langle h_j, S_j v \rangle + \langle u_T, v(x, T) \rangle \quad \forall v \in X(Q) \end{array} \right.$$

En outre p vérifie :

$$(3.59) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial t} + A^* p = f \\ C_j p = 0 \quad j = 0, \dots, p-1 \\ C_j p = h_j \quad j = p, \dots, m-1 \\ p(x, T) = u_T(x) \end{array} \right.$$

et $q_j \ j = p, \dots, m-1$ vérifie

$$(3.60) \quad q_j = T_j p \quad j = p, \dots, m-1$$

où $C_j p$, $T_j p$ et $p(x, T)$ sont pris au sens de la proposition 3.6 ■

Démonstration La première partie est une conséquence directe des propositions 3.3 et 3.10. Il reste à montrer que p, q_j vérifient (3.59) et (3.60). Pour cela on prend successivement dans la 3ème équation de (3.58) :

a) $v \in \mathcal{D}(Q)$ (donc v appartient bien à $X(Q)$) ce qui donne

$$-\frac{\partial p}{\partial t} + A^* p = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q)$$

ce qui prouve la 1ère équation de (3.59) et

$$p \in D_{P^*}(Q)$$

b) $v \in H^{2m,1}_0(Q)$, $B_j v = 0$, $j = 0, 1, \dots, m-1$ (donc v appartient bien à $X(Q)$),

ce qui, grâce à la formule de Green a) de la proposition 3.7 montre que

$$\sum_{j=0}^{p-1} \langle S_j v, C_j p \rangle + \sum_{j=p}^{m-1} \langle S_j v, C_j p - h_j \rangle = 0$$

ce qui, grâce à la proposition (3.8), a) prouve les 2ème et 3ème équation) de (3.59)

c) $v \in H^{2m,1}(Q)$, $v(x, 0) = 0$, $B_j v = S_j v = 0$ (donc $v \in X(Q)$), ce qui, grâce à la formule de Green b) de la proposition 3.7 montre que :

$$\langle p(x, T) - u_T(x), v(x, T) \rangle = 0$$

d'où la 4ème équation de (3.59) grâce à la proposition 3.8 b)

d) $v \in H^{2m,1}_0(Q)$, $B_j v = 0$, $j = 0, 1, \dots, p-1$ (donc $v \in X(Q)$) ce qui,

grâce aux résultats des points a) et b) et la formule de Green a) de la proposition 3.7 montre que

$$\sum_{j=p}^{m-1} \langle T_j p - q_j, B_j v \rangle = 0$$

ce qui prouve (3.60) en utilisant la proposition 3.8 a) où l'on a permuté

B_j et S_j ■

Remarque 3.6 : La distribution p n'est pas nécessairement unique à vérifier (3.59) ! ■

3.5 Observations ponctuelles.

On se place dans le cadre du § 3.4 du chapitre I, et du paragraphe 3.4 de ce chapitre.

Donnons nous :

$$(3.61) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_j \in \Omega & j = 1, 2, \dots, k \\ x'_j \in \Gamma & j = 1, 2, \dots, k' \\ x''_j \in \Omega & j = 1, 2, \dots, k'' \end{array} \right.$$

Nous allons traiter le cas où l'on observe :

$$(3.62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{l'évolution de la solution } y \text{ de l'instant } 0 \text{ à l'instant } T \\ \text{en } k \text{ points } x_1, x_2, \dots, x_k \text{ de } \Omega \end{array} \right.$$

$$(3.63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{l'évolution de } S_\ell y, \ell = p, \dots, s \text{ en } k' \text{ points} \\ x'_1, \dots, x'_{k'} \text{ de } \Gamma \end{array} \right.$$

$$(3.64) \quad \text{la solution } y \text{ à l'instant } T \text{ en } k'' \text{ points } x''_1, \dots, x''_{k''} \text{ de } \Omega.$$

Précisons à quelles conditions ces observations ont un sens sur $Y = H^{2m,1}(Q)$:
Pour que (3.62) ait un sens, il faut que $H^{2m} \subset C^0(\bar{\Omega})$, c'est-à-dire que :

$$(3.65) \quad n < 4m$$

Pour que (3.63) ait un sens, il faut que (S_j étant défini en (3.42)), l'entier s vérifie :

$$(3.66) \quad \mu_s < \frac{4m - n}{2}$$

Pour que enfin (3.64) ait un sens, il faut que

$$(3.67) \quad n < 2m$$

Avec ces hypothèses, l'espace $\mathcal{H}$ des observations et l'opérateur d'observation $\mathcal{C}$ sont donnés par :

$$(3.68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} = (L^2(0, T))^{k+(s-p+1)k'} \times \mathbb{R}^{k''} = \mathcal{H}' \\ \Lambda_{\mathcal{H}} = \text{identité} \\ \mathcal{C} : y \in H^{2m,1}(Q) \longrightarrow (y(x_j, \cdot) \quad j = 1, \dots, k ; S_{\ell} y(x'_j, \cdot) \quad \ell = p, \dots, s, \\ \quad \quad \quad j=1, \dots, k' ; y(x''_j, T) \quad j = 1, \dots, k'') \in \mathcal{H} \end{array} \right.$$

et une observation est de la forme :

$$(3.69) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{d_j} \in L^2(0, T) \quad j = 1, 2, \dots, k \\ z_{d'_{\ell_j}} \in L^2(0, T) \quad \ell = p, \dots, s, j = 1, \dots, k' \\ z_{d''_j} \in \mathbb{R} \quad j = 1, \dots, k'' \end{array} \right.$$

La fonctionnelle J des moindres carrés définie en (1.6) s'écrit alors ici :

$$(3.70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathcal{P} = (A, B_j \quad j = p, \dots, m-1) \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \\ J(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^k \int_0^T (y(x_j, t) - z_{d_j}(t))^2 dt + \sum_{\ell=p}^s \sum_{j=1}^{k'} \int_0^T (S_{\ell} y(x'_j, t) - z_{d'_{\ell_j}}(t))^2 dt \\ \quad \quad \quad + \sum_{j=1}^{k''} (y(x''_j, T) - z_{d''_j})^2 \end{array} \right.$$

On peut alors associer à chaque observation les distributions :

$$(3.71) \quad f = -2 \sum_{j=1}^k \delta_{\Omega}(x - x_j) (y(x_j, t) - z_{d_j}(t)) \in \mathcal{D}'(Q)$$

$$(3.72) \quad h_{\ell} = -2 \sum_{j=1}^{k'} \delta_{\Gamma}(x - x'_j) (S_{\ell} y(x'_j, t) - z_{d'_{\ell_j}}(t)) \in \mathcal{D}'(\Sigma) \quad \ell = p, \dots, s$$

$$(3.73) \quad u_T = -2 \sum_{j=1}^{k''} \delta_{\Omega}(x - x''_j) (y(x''_j, T) - z_{d''_j}) \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

dont il est facile de montrer (grâce au fait que les points x_j et x_j'' sont à l'intérieur de Ω , et grâce à (3.65) (3.66) (3.67)) qu'elles vérifient :

$$(3.74) \quad f \in \Xi^{-2m, -1}(Q), \quad h_\ell \in H^{-2m + \mu_\ell + \frac{1}{2}}(\Sigma) / \Xi^{-2m + \mu_\ell + \frac{1}{2}} /_{2m}(\Sigma), \quad u_T \in \Xi^{-m}(\Omega)$$

On a alors le théorème :

Théorème 3.5 : Avec les hypothèses (3.44) à (3.47) du chapitre I, et (3.61) à (3.69), la fonctionnelle $J(\mathcal{P})$ de $\mathcal{T}_c$ dans $\mathbb{R}$ définie en (3.70) est classe C^∞ de l'ouvert $\mathcal{T}_c$ dans $\mathbb{R}$. Sa dérivée $J'(\mathcal{P})$ au point

$\mathcal{P} = (A, B_j \quad j = p, \dots, m-1) \in \mathcal{T}_c$ s'exprime par :

$$(3.75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \delta \mathcal{P} = (\delta A, \delta B_j \quad j = p, \dots, m-1) \in \mathcal{T} \\ J'(\mathcal{P}) \cdot \delta \mathcal{P} = \int_Q \delta A y.p \, dx \, dt + \sum_{j=p}^{m-1} \langle \delta B_j y, q_j \rangle \end{array} \right.$$

où $y \in H^{2m,1}(Q)$ est la solution de (3.42) chapitre I (Système Direct), et où

$p \in L^2(Q)$ et $q_j \in H^{-2m+m_j + \frac{1}{2}}(\Sigma) / \Xi^{-2m+m_j + \frac{1}{2}} /_{2m}(\Sigma)$ sont l'unique solution de :

$$(3.76) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_Q p \left(\frac{\partial v}{\partial t} + Av \right) dx \, dt + \sum_{j=p}^{m-1} \langle q_j, B_j v \rangle = -2 \sum_{j=1}^k \int_0^T (y(x_j, t) - z_{d_j}(t)) v(x_j, t) dt \\ -2 \sum_{\ell=p}^s \sum_{j=1}^{k'} \int_0^T (S_\ell y(x'_j, t) - z_{d_j}'(t)) S_\ell v(x'_j, t) dt - 2 \sum_{j=1}^{k''} (y(x''_j, T) - z_{d_j}''(T)) v(x''_j, T) \\ \forall v \in H^{2m,1}(Q), \quad B_j v = 0 \quad j = 0, 1, \dots, p-1, \quad v(x, 0) = 0 \quad (\text{Système adjoint}) \end{array} \right.$$

En outre, p et $q_j \quad j = p, \dots, m-1$ vérifient :

$$(3.77) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial t} + A^* p = -2 \sum_{j=1}^k \delta_{\Omega}(x - x_j) (y(x_j, t) - z_{d_j}(t)) \\ C_j p = 0 \quad j = 0, \dots, p-1 \quad \text{et} \quad j = s+1, \dots, m-1 \\ C_j p = -2 \sum_{i=1}^{k'} \delta_{\Gamma}(x - x_i') (S_j y(x_i', t) - z_{d_{ji}}'(t)) \quad j = p, \dots, s \\ p(x, T) = -2 \sum_{j=1}^{k''} \delta_{\Omega}(x - x_j'') (y(x_j'', T) - z_{d_j}'') \end{array} \right.$$

$$(3.78) \quad q_j = T_j p \quad j = p, \dots, m-1$$

Démonstration : On applique le théorème 1.1. D'après la définition de F ((3.52) chapitre I), l'état adjoint $p \in F'$ est ici de la forme

$$(3.79) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = (p, \tilde{q}, q_j \quad j = p, \dots, m-1) \\ p \in L^2(Q), \tilde{q} \in (\tilde{F})', q_j \in H^{-2m+m_j+\frac{1}{2}, (-2m+m_j+\frac{1}{2})/2m}(\Sigma) \end{array} \right.$$

L'équation (1.7) donne alors (3.75), et (1.9) s'écrit :

$(p, \tilde{q}, q_j \quad j = p, \dots, m-1)$ est l'unique solution de :

$$(3.80) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_Q p \left(\frac{\partial v}{\partial t} + A v \right) dx dt + \langle \tilde{q}, (v(0), B_j v \quad j = 0, \dots, p-1) \rangle_{\tilde{F}', \tilde{F}} \\ + \sum_{j=p}^{m-1} \langle q_j, B_j v \rangle = -2 \mathcal{E}^* (\mathcal{E} y - z_d) \\ \forall v \in H^{2m,1}(Q) \end{array} \right.$$

ce qui prouve en particulier que $(p, q_j \quad j = p, \dots, m-1)$ est une solution de (3.76),

donc la solution de (3.76) puisqu'elle est unique. Enfin (3.77) et (3.78) résultent de (3.76) et du théorème 3.4. ■

3.6 Applications.

On va appliquer le théorème 3.5 en prenant comme opérateurs frontière B_j et S_j ceux donnés dans la remarque 3.4.

Il faut alors remplacer (3.63) par :

$$(3.81) \quad \begin{cases} \text{On observe l'évolution sur la frontière } \Gamma \text{ de } \Omega \text{ de } B_j' y \quad j = p, \dots, s \\ \text{en } k' \text{ points } x_1, \dots, x_{k'} \text{ de } \Gamma \end{cases}$$

et le système direct s'écrit :

$$(3.82) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + A y = f_0 & \text{pp. dans } Q \\ B_j' y = g_j & j = 0, 1, \dots, p-1 \quad \text{sur } \Sigma \\ - \Psi_j' + c_j B_j' = g_j & j = p, \dots, m-1 \quad \text{sur } \Sigma \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Ici $\mathcal{P} = (A, - \Psi_j' + c_j B_j' \quad j = p, \dots, m-1)$ est une fonction linéaire continue des paramètres $\lambda = (a_{pq}, c_j) \in \Lambda$ où l'on a posé :

$$(3.83) \quad \Lambda = \prod_{|p|, |q| \leq m} c_{|p|, |q|, 1}(\bar{Q}) \times \prod_{j=p}^{m-1} c^{2m-m_j, 2m-m_j+1}(\bar{\Sigma})$$

La fonctionnelle $J(\mathcal{P})$ devient donc une fonctionnelle $J(\lambda)$, et la formule (3.75) donnant $J'(\mathcal{P})$ permet d'obtenir $J'(\lambda)$, qui peut d'ailleurs se

réécrire formellement comme (3.10)⁽¹⁾ en utilisant la formule de Green.

L'état adjoint p est alors solution de :

$$(3.84) \quad \begin{cases} - \frac{\partial p}{\partial t} + A^* p = - 2 \sum_{j=1}^k \delta_{\Omega}(x - x_j) (y(x_j, t) - z_{d_j}(t)) \\ B_j' p = 0 & j = 0, 1, \dots, p-1 \\ - \Psi_j^* + c_j B_j' p = - 2 \sum_{i=1}^k \delta_{\Gamma}(x - x_i') (B_j' y(x_i', t) - z_{d_{ji}}'(t)) & j = p, \dots, s \end{cases}$$

(1) où l'on remplace B_j par B_j'

$$\left\{ \begin{array}{l} - \psi_j^* + c_j B_j' p = 0 \quad j = s+1, \dots, m-1 \\ p(x, T) = -2 \sum_{j=1}^{k''} \delta_{\Omega}(x - x_j'') (y(x_j'', T) - z_{d_j}'') \end{array} \right.$$

Remarque 3.7 : On a encore, grâce à (3.10) une remarque analogue à la remarque 3.2. ■

Exemple 3.4 : comme l'exemple 3.1, sauf que l'on n'observe la température du corps qu'en un nombre fini k' de points $x_1', x_2', \dots, x_{k'}'$ de la surface Γ de Ω . Si on suppose alors que les données sont régulières (Ω de classe C^1 , de dimension $n \leq 3$, $a(x) \in C^1(\bar{\Omega})$, $y_0 \in H^1(\Omega)$), alors la solution y de (3.15) est dans $H^{2,1}(Q)$ et l'observation définie ci-dessus a un sens. En introduisant une fonction coût du type :

$$(3.85) \quad J(\alpha) = \sum_{j=1}^{k'} \int_0^T (y|_{\Gamma}(x_j', t) - z_{d_{o,j}}'(t))^2 dt$$

on a encore (3.19) où y est solution de (3.15) et p solution de :

$$(3.86) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a(x) \frac{\partial p}{\partial x_i}) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = \alpha(x) p - \frac{2}{a(x)} \sum_{j=1}^{k'} \delta_{\Gamma}(x - x_j') (y|_{\Gamma}(x_j', t) - z_{d_{o,j}}'(t)) \\ p(x, T) = 0 \end{array} \right. \quad \blacksquare$$

Exemple 3.5 Identification de la porosité dans un gisement d'hydrocarbures
(cf JACQUARD [10])

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ le domaine du gisement, $y(x, t)$ la pression au point x et à l'instant t , $y_0(x)$ la pression initiale du gaz dans le gisement, $a(x)$ la porosité de la roche en chaque point. Les conditions au bord du gisement sont du type "gradient de pression nulle", c'est-à-dire Neumann homogène. L'équation de la pression est alors :

$$(3.87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (a(x) \frac{\partial y}{\partial x_i}) = f_0(x, t) \quad \text{dans } Q \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

Si Ω est régulier, $f_0 \in L^2(Q)$, $y_0 \in H^1(\Omega)$ et $a \in C^1(\bar{\Omega})$ la solution y sera $H^{2,1}(Q)$, et on pourra observer l'évolution de la pression en un certain nombre de points x_j du domaine Ω , qui sont les points de forage. En prenant une fonction coût du type

$$(3.88) \quad J(a) = \sum_{j=1}^k \int_0^T (y(x_j, t) - z_{d_j}(t))^2 dt$$

la théorie précédente montre que J dépend de façon dérivable de $a \in C^1(\bar{\Omega})$, et que

$$(3.89) \quad \frac{\partial J}{\partial a}(x) = \sum_{i=1}^3 \int_0^T \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} dt$$

où y est la solution de (3.87) et où p est la solution de

$$(3.90) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (a(x) \frac{\partial p}{\partial x_i}) = -2 \sum_{j=1}^k \delta_{\Omega}(x - x_j) (y(x_j, t) - z_{d_j}(t)) \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 \\ p(x, T) = 0 \end{array} \right.$$

Il y a en fait une difficulté supplémentaire dans le cas de cet exemple, car le second membre f_0 de (3.87) est physiquement, une combinaison de masses de Dirac (placées aux points d'observation), et n'est donc pas dans $L^2(Q)$. (cf chapitre III - Remarque 2.3). ■

3.7 Observation répartie dans une équation non linéaire.

On considère l'équation parabolique non linéaire du § 3.5 du chapitre I, soit :

$$(3.91) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j}) + a_0 y + |y|^\gamma y = f \quad \text{dans } Q \\ y = 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ y(x, 0) = y_0(x) \quad \text{sur } \Omega \end{array} \right.$$

dont on sait que, sous les hypothèses (3.54) à (3.59) et (3.61) du chap. I, elle admet une solution unique y vérifiant (3.63) chap. I.

On désire identifier le nombre positif γ sur le vu d'une observation $z_d(x)$, répartie par exemple, de la solution y de (3.91). On appliquera pour cela le théorème 1.1., où l'on prendra $\mathcal{A}, \mathcal{A}_c, Y, F$ et $\mathcal{V}$ donnés par (3.63) (3.68) (3.69) du chapitre I, et

$$(3.92) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} = L^2(Q) = \mathcal{H}' \\ \Lambda_{\mathcal{H}} = \text{identité} \\ \mathcal{C} = \text{injection canonique de } L^\infty(Q) \text{ dans } L^2(Q) \end{array} \right. \quad z_d \in L^2(Q)$$

La fonctionnelle J des moindres carrés est alors donné par

$$(3.93) \quad J(\gamma) = \int_Q (y(x, t; \gamma) - z_d(x, t))^2 dx dt \quad \forall \gamma \in \mathcal{A}_c$$

et le théorème 1.1 s'écrit :

Théorème 3.6 Avec les hypothèses (3.54) à (3.58), (3.61), (3.63) (3.68) (3.69) du chapitre I, et (3.92), la fonctionnelle J définie en (3.93) est de classe C^1 de l'ouvert $\mathcal{A}_c =]0, +\infty[$ de $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Sa dérivée en un point $\gamma \in \mathcal{A}_c$ est :

$$(3.94) \quad J'(\gamma) = \int_Q y p \log y dx dt$$

où $y \in Y$ est la solution de (3.91) (Système direct) et où

$p \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ est la solution de :

$$(3.95) \quad \begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ji} \frac{\partial p}{\partial x_j}) + \left[a_0 + (\gamma + 1) y^\gamma \right] p = -2(y - z_d) \text{ dans } Q \\ p = 0 \text{ sur } \Sigma \\ p(x,T) = 0 \text{ sur } \Omega \end{cases} \quad (\text{Système adjoint})$$

Démonstration : l'équation (1.9) du théorème 1.1 s'écrit ici :

$$(3.96) \quad \begin{cases} p = (p,q) \quad p \in [L^\infty(Q)]', \quad q \in [L^\infty(\Omega)]' \\ \langle p, \frac{dv}{dt} + A v + (\gamma + 1) y^\gamma v \rangle + \langle q, v(0) \rangle = -2 \int_Q (y - z_d) v \, dx \, dt \\ \forall v \in Y \end{cases}$$

L'équation (3.96) est satisfaite si on définit

$p \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \subset L^2(Q) \subset L^1(Q) \subset [L^\infty(Q)]'$ comme solution de (3.95), et $q \in L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega) \subset [L^\infty(\Omega)]'$ par :

$$(3.97) \quad q = p(0)$$

Alors (3.94) résulte de (1.7). ■

Remarque 3.8 Si les données sont plus régulières

(Ω régulier, $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $y_0 \in H_0^1(\Omega)$), la solution y de (3.91)

sera dans $H^{2,1}(Q)$, et, si $n \leq 3$, on pourra considérer des observations ponctuelles (cf Remarque 2.6). ■

4.

IDENTIFICATION DANS UN PROBLEME D'EVOLUTION HYPERBOLIQUE DU 2ème ORDRE EN t
(OBSERVATION REPARTIE)

Comme nous n'avons pas su faire rentrer, au chapitre I, le théorème de dérivabilité dans le cadre du théorème des fonctions implicites, nous ne pourrons pas appliquer ici le théorème 1.1 sur la dérivabilité de la fonctionnelle J. On a cependant des résultats similaires.

4.1 Dérivabilité de la fonction coût :

On se place dans les hypothèses et notations du § 4.1 du chapitre I. On définit, comme au § 1 de ce chapitre une fonctionnelle J de $\mathcal{A}_c$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$(4.1) \quad J(A) = \int_0^T \left| \Phi(A) - z_d \right|_H^2 dt \quad \forall A \in \mathcal{A}_c$$

où

$$(4.2) \quad z_d \in L^2(0, T; H) \quad \text{est l'observation, donnée.}$$

On a alors le

Théorème 4.1 : Avec les hypothèses et notations (4.1) à (4.13) chapitre I, l'application J de $\mathcal{A}_c$ dans $\mathbb{R}$ définie en (4.1) est continue et dérivable en tout point de l'ouvert $\mathcal{A}_c$ de $\mathcal{A}$, et l'application dérivée $J'(A)$ au $A \in \mathcal{A}_c$ est donnée par :

$$(4.3) \quad \begin{cases} \forall \delta A \in \mathcal{A} \\ J'(A) \cdot \delta A = \int_0^T (\delta A y(A), p(A)) dt \end{cases}$$

où $y(A) \in Y$ est solution de

$$(4.4) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + A y = f \\ y(0) = y_0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = y_1 \end{cases} \quad (\text{Système Direct})$$

et où $p(A) \in Y$ est solution de

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 y}{dt^2} + A p = -2 (y(A) - z_d) \\ p(T) = 0, \quad \frac{dp}{dt}(T) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{Système adjoint})$$

Démonstration : On a immédiatement

$$(4.6) \quad J'(A) \cdot \delta A = 2 \int_0^T (y(A) - z_d, \delta y)_H dt$$

où δy est solution de (4.16) chap. I. En introduisant l'état adjoint p par (4.5), (4.6) devient

$$(4.7) \quad J'(A) \cdot \delta A = - \int_0^T \left(\frac{d^2 p}{dt^2} + A p, \delta y \right)_H dt$$

d'où en intégrant deux fois par partie le 1er terme :

$$(4.8) \quad J'(A) \cdot \delta A = - \int_0^T \left(p, \frac{d^2 \delta y}{dt^2} + A \delta y \right) dt$$

d'où (4.3) compte tenu de (4.16) chapitre I . ■

4.2 Application :

Nous allons appliquer le résultat précédent, dans le cadre du § 4.2 du chapitre I, à l'identification des coefficients a_{pq} de l'opérateur A .

Soit :

$$(4.9) \quad z_d \in L^2(Q)$$

et

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda = (a_{pq}) \in \Lambda_{\text{adm}} \\ J(\lambda) = \int_Q (y(x,t; \lambda) - z_d(x,t))^2 dx dt \\ \text{où } y(x,t; \lambda) \text{ est la solution de (4.68) chapitre I.} \end{array} \right.$$

Le théorème 4.1 montre alors que J est une fonction dérivable de λ , et que

$$(4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \delta \lambda = (\delta a_{pq}) \in \Lambda \\ J'(\lambda) \cdot \delta \lambda = \sum_{|p|, |q| \leq m} \int_{\Omega} \delta a_{pq} \left[\int_0^T D^q y(x, t) D^p p(x, t) dt \right] dx \end{array} \right.$$

où y est solution de (4.68) chapitre I (Système Direct) et où p est solution de

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq}(x) D^q p) = -2(y - z_d) \quad \text{dans } Q \\ \frac{\partial^j p}{\partial \nu^j} = 0 \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{sur } \Sigma \\ p(x, T) = 0, \frac{dp}{dt}(x, T) = 0 \quad (\text{Système Adjoint}) \end{array} \right.$$

Remarque 3.9

cf. Remarque 3.2

5.

THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE DE LA SOLUTION DU PROBLEME D'IDENTIFICATION5.1 Cas d'une équation stationnaire

Nous nous plaçons dans ce paragraphe dans un cadre assez restrictif. On se donne en effet un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^n$, et on considère un système régi par une équation aux dérivées partielles du type diffusion isotrope, c'est-à-dire :

$$(5.1) \quad - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a(x) \frac{\partial y}{\partial x_i}) = f \quad \text{dans } \Omega$$

$$(5.2) \quad \text{Conditions aux limites sur } y \text{ sur le bord } \Gamma \text{ de } \Omega.$$

Un tel problème, considéré comme une équation en y , n'est pas toujours bien posé (par exemple, si on prend des conditions aux limites de type Neumann, il peut y avoir en y aucune solution ou une infinité).

Mais nous considérerons ici (5.1) (5.2) comme une équation en a (donc seule (5.1) sera prise en compte), y étant considéré comme une donnée ; On suppose donc que l'observation z_d est répartie en espace.

Nous voulons montrer que, sous certaines hypothèses, l'équation (5.1) admet une solution et une seule $a \in L^\infty(\Omega)$.

Or (5.1) s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial z_d}{\partial x_i} \frac{\partial a}{\partial x_i} + \Delta z_d \times a = -f$$

et nous serons amenés à chercher la solution de cette équation hyperbolique du 1er ordre en a dans $L^p(\Omega)$.

Théorème 5.1 On se donne :

$$(5.3) \quad \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^n, \text{ de frontière } \Gamma \text{ de classe } C^1 \text{ par morceaux et une observation } z_d(x) \text{ vérifiant}$$

$$(5.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe un ouvert } X \text{ contenant strictement } \Omega \text{ tel que } z_d \\ \text{se prolonge à } X \text{ et vérifie sur } X \\ z_d \in C^2(X), \quad z_d, \frac{\partial z_d}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 z_d}{\partial x_i^2} \text{ bornés sur } X \text{ (} i=1,2,\dots,n \text{)} \end{array} \right.$$

$$(5.5) \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \Delta z_d \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in \Omega$$

et on note :

$$\Gamma_- = \left\{ x \in \Gamma \mid \begin{array}{l} \text{la normale } \vec{\nu} \text{ à } \Gamma \text{ extérieure à } \Omega \text{ soit définie en } x, \\ \vec{\text{grad}} z_d \cdot \vec{\nu} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_d}{\partial x_i} \cdot \nu_i < 0 \end{array} \right\}$$

Alors, $\forall f \in L^\infty(\Omega)$, il existe $a \in L^\infty(\Omega)$ unique tel que,

$$(5.6) \quad - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a(x) \frac{\partial z_d}{\partial x_i} \right) = f \quad \text{dans } \Omega$$

$$(5.7) \quad a = 0 \quad \text{sur } \Gamma_-$$

$$(5.8) \quad \| a \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \alpha^{-1} \| f \|_{L^\infty(\Omega)}$$

Remarque 5.1 L'hypothèse (5.4) est automatiquement vérifiée si Γ est de classe C^2 et $z_d \in C^2(\bar{\Omega})$ ■

Remarque 5.2 La condition (5.7) peut se remplacer trivialement par

$$(5.9) \quad a = \varphi \quad \text{donné sur } \Gamma_-$$

où φ est la trace sur Γ_- d'une fonction $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$. On voit donc que, sous les seules hypothèses (5.3) à (5.5) l'équation (5.6) en a , c'est-à-dire le problème d'identification, admet une infinité de solutions $a \in L^\infty(\Omega)$, correspondant chacune à une donnée particulière de a sur Γ_- . ■

Pour avoir unicité, il faut faire une hypothèse supplémentaire :

Corollaire 5.1 : Avec les hypothèses du théorème 5.1 et :

$$(5.10) \quad \vec{\text{grad}} z_d \cdot \vec{\nu} \geq 0 \quad \text{en tout point de } \Gamma \text{ où } \vec{\nu} \text{ est définie}$$

l'équation en a (5.6) admet une solution et une seule dans $L^\infty(\Omega)$. Cette solution vérifie en outre (5.8).

Démonstration du corollaire 5.1 : l'hypothèse (5.10) entraîne que

$$\Gamma_- = \emptyset \quad \text{d'où le résultat}$$

Remarque 5.3 : Même dans le cas du corollaire 5.1, la solution $a \in L^\infty(\Omega)$ n'est pas la seule solution distribution de (5.6). Voici un contre-exemple :

$$\Omega =]-1, 1[\quad , \quad n = 1$$

$$z_d = x^2$$

$$f = -2$$

Alors l'équation (5.6), outre la solution $a(x) = 1 = \text{cste}$ (qui est celle donnée par le corollaire 5.1) admet comme solution les distributions de la forme :

$$a(x) = 1 + k \, v \, p\left(\frac{1}{x}\right) \quad k \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Démonstration du théorème 5.1 :

Nous allons montrer que l'équation (hyperbolique du 1er ordre) en a :

$$(5.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_d}{\partial x_i} \frac{\partial a}{\partial x_i} + a \, \Delta z_d = -f \quad \text{dans } \Omega \\ a = 0 \quad \text{sur } \Gamma_- \end{array} \right.$$

possède une solution et une seule dans $L^\infty(\Omega)$.

Définissons sur Ω le champ de vecteurs H par

$$(5.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} H(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x)) \\ \text{avec } h_i(x) = \frac{\partial z_d}{\partial x_i} \end{array} \right.$$

On sait alors, d'après l'hypothèse (5.4), associer à H (cf. BARDOS [1]) un semi-groupe $\exp - t H$ sur les fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$, ayant les propriétés suivantes :

$$(5.13) \quad \exp - t H \text{ est un semi-groupe de contraction dans } L^\infty(\Omega), \text{ mais il n'est pas fortement continu dans } L^\infty(\Omega)$$

$$(5.14) \quad \exp - t H \text{ est un semi-groupe fortement continu dans } L^p(\Omega), 1 \leq p < +\infty, \text{ vérifiant :}$$

$$(5.15) \quad \forall u \in L^p(\Omega), \quad \|(\exp - t H) u\|_{L^p(\Omega)} \leq e^{-\frac{\omega}{p} t} \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

où ω est défini par :

$$(5.16) \quad \omega = \sup_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = \sup_{x \in \Omega} \Delta z_d \geq \alpha > 0.$$

En outre, le générateur infinitésimal $-H_p$ de ce semi-groupe dans L^p , $1 \leq p < +\infty$, est caractérisé par :

$$(5.17) \quad D(H_p) = \left\{ u \mid u \in L^p(\Omega), \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), u|_{\Gamma_-} = 0 \right\}$$

$$(5.18) \quad H_p = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Définissons enfin $B \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$, $1 \leq p \leq +\infty$ par :

$$(5.19) \quad B : u \in L^p(\Omega) \longrightarrow \Delta z_d \times u \in L^p(\Omega)$$

(B est l'opérateur "multiplication par Δz_d ").

L'équation (5.11) se réécrit alors dans $L^p(p)$:

$$(5.20) \quad \begin{cases} a \in D(H_p) \\ H_p a + B a = -f \end{cases}$$

et nous allons montrer que l'équation (5.20) admet une solution unique dans $L^p(\Omega)$, $\forall p \geq p_0$ où p_0 est défini par :

$$(5.21) \quad \frac{\omega}{p_0} = \frac{\alpha}{2}$$

En effet, pour $\lambda > 0$ quelconque, (5.21) se réécrit :

$$(5.22) \quad \begin{cases} a \in D(H_p) \\ \lambda a + (H_p + (B - \lambda I))a = -f \end{cases}$$

Or, $B - \lambda I$ étant un opérateur linéaire continu sur $L^p(\Omega)$, $-(H_p + (B - \lambda I))$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe vérifiant :

$$(5.23) \quad \left\| \exp - t[H_p + (B - \lambda I)]u \right\|_{L^p(\Omega)} \leq e^{\left[\frac{\omega}{p} + \|B - \lambda I\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} \right] t} \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

On en déduit que (5.22) aura une solution et une seule si on peut trouver λ vérifiant

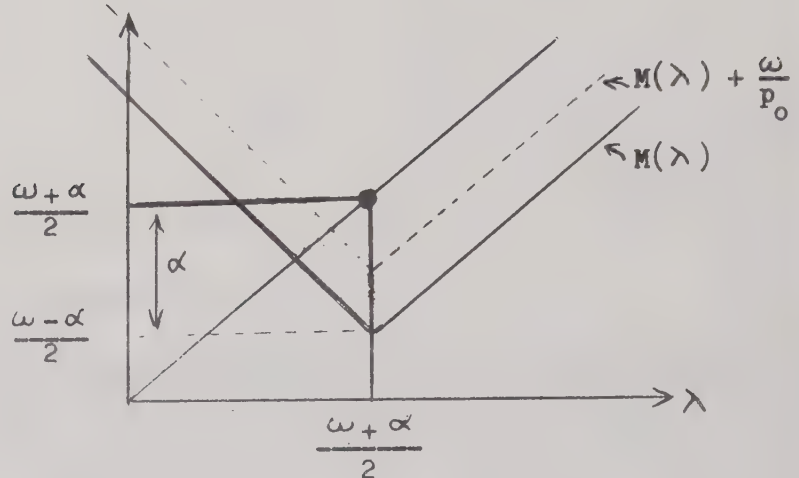
$$(5.24) \quad \lambda > \frac{\omega}{p} + \|B - \lambda I\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))}$$

Or, d'après la définition de B , il est clair que :

$$\|B - \lambda I\|_{\mathcal{L}(L^p(\Omega))} = M(\lambda) = \begin{cases} \omega - \lambda & \text{si } \lambda \leq \frac{\omega + \alpha}{2} \\ \lambda - \alpha & \text{si } \lambda \geq \frac{\omega + \alpha}{2} \end{cases}$$

On voit, sur la figure ci-contre que, à condition de prendre $p \geq p_0$ défini en (5.21), (5.24) sera satisfaite en prenant :

$$(5.25) \quad \lambda = \frac{\omega + \alpha}{2}$$



On a en outre la majoration :

$$\|a\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \times \frac{1}{\frac{\omega + \alpha}{2} - (\frac{\omega}{p} + \|B - \lambda I\|_{\mathcal{L}(L^p)})}$$

$$\|a\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \times \frac{1}{\frac{\omega + \alpha}{2} - \frac{\omega}{p} - \frac{\omega - \alpha}{2}} \leq \alpha^{-1} \|f\|_{L^p}$$

Ce qui prouve que $a \in L^\omega(\Omega)$ et que l'on a bien (5.8). ■

5.2 Cas des Equations d'Evolution

De même qu'au paragraphe précédent, on se place ici dans un cadre restrictif : étant donné un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$, on considère un système régi par une équation d'évolution du type diffusion isotrope, c'est-à-dire :

$$(5.35) \quad \frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a(x, t) \frac{\partial y}{\partial x_i}) = f \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

$$(5.36) \quad \text{Conditions initiales et aux limites sur } y$$

Nous considérerons ici (5.35) (5.36) comme une équation en a ; donc seule (5.35) sera prise en compte. Nous supposons donc que l'observation z_d est répartie en espace et en temps.

Nous allons montrer que, sous certaines hypothèses, l'équation (5.35) admet une solution a et une seule.

Théorème 5.2 : On se donne

(5.37) Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ de classe C^1 par morceaux et une observation $z_d(x, t)$ vérifiant

$$(5.38) \quad \frac{\partial z_d}{\partial t} \in L^\infty(Q)$$

(5.39) $\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe un ouvert } X \text{ contenant strictement } \Omega \text{ tel que, pour presque} \\ \text{tout } t \text{ de }]0, T[, \quad z_d(\cdot, t) \text{ se prolonge à } X \text{ et vérifie sur } X : \\ z_d(t) \in C^2(X), \quad z_d(t), \frac{\partial z_d}{\partial x_i}(t), \frac{\partial^2 z_d}{\partial x_i^2}(t) \text{ bornés sur } X \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$

$$(5.40) \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \Delta z_d \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in \Omega, \text{ pp. sur }]0, T[$$

et on note, pour presque tout t de $]0, T[$:

$$(5.41) \quad \Gamma_-(t) = \left\{ x \in \Gamma \mid \text{la normale } \vec{\nu} \text{ à } \Gamma \text{ extérieure à } \Omega \text{ soit définie en } x, \right. \\ \left. \vec{\text{grad}} z_d(t) \cdot \vec{\nu} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_d}{\partial x_i}(t) \cdot \nu_i < 0 \right.$$

Alors, $\forall f \in L^\infty(Q)$, il existe $a \in L^\infty(Q)$, unique, tel que :

$$(5.42) \quad \frac{\partial z_d}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a(x, t) \frac{\partial z_d}{\partial x_i} \right) = f \quad \text{dans } Q$$

$$(5.43) \quad a(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_-(t) \quad \text{pp. sur }]0, T[$$

$$(5.44) \quad \|a\|_{L^\infty(Q)} \leq \alpha^{-1} \left\| f - \frac{\partial z_d}{\partial t} \right\|_{L^\infty(Q)}$$

Remarque 5.4 L'hypothèse (5.39) est trivialement vérifiée si Γ est de classe C^2 et si $z_d(t) \in C^2(\Omega)$ pour presque tout $t \in]0, T[$.

Remarque 5.5 : cf. remarque 5.2. ■

Corollaire 5.2 Avec les hypothèses du théorème 5.2 et

$$(5.45) \quad \overrightarrow{\text{grad}} z_d(t) \cdot \overrightarrow{\gamma} \geq 0 \text{ en tout point de } \Gamma \text{ ou } \overrightarrow{\gamma} \text{ est définie et} \\ \text{pour presque tout } t \in]0, T[$$

l'équation en a (5.42) admet une solution et une seule dans $L^\infty(Q)$. Cette solution vérifie en outre (5.44).

Corollaire 5.3 : Avec les hypothèses du théorème 5.2, le système (5.42) (5.43) admet au plus une solution $a \in L^\infty(\Omega)$. Cette solution vérifie, lorsqu'elle existe :

$$(5.46) \quad \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \alpha^{-1} \left\| f - \frac{\partial z_d}{\partial t} \right\|_{L^\infty(Q)}$$

Démonstration du théorème 5.2.

Fixons t L'équation (5.42) se récrit

$$(5.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a(x,t) \frac{\partial z_d}{\partial x_i} \right) = f - \frac{\partial z_d}{\partial t} \\ a(x,t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_-(t). \end{array} \right.$$

Or d'après les hypothèses (5.38) à (5.40), le théorème 5.1 s'applique. Le système (5.47) admet donc pour presque tout $t \in]0, T[$ une solution $a(t) \in L^\infty(\Omega)$ et vérifiant :

$$(5.48) \quad \|a(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \alpha^{-1} \left\| f(t) - \frac{\partial z_d}{\partial t}(t) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \blacksquare$$

ce qui finit de prouver le théorème.

Remarque 5.6 :

On a des résultats absolument similaires dans le cas de l'équation des ondes en remplaçant

$$\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{par} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \bullet \quad \blacksquare$$

CHAPITRE IIIRÉSULTATS NUMÉRIQUES

		Pages
1	<u>EQUATIONS ELLIPTIQUES (2 DIMENSIONS D'ESPACE)</u>	
1.1.	Un problème de Neumann (observation répartie)	109
i)	Identification de a_0 et a_1	111
ii)	_____ a_1 seul	113
iii)	_____ sous forme paramétrique	118
iv)	Influence du bruit sur l'observation.	118
1.2	Un problème de Dirichlet (Observation répartie)	122
i)	Exemple scolaire	122
ii)	Exemple réel	126
2	<u>EQUATIONS PARABOLIQUES</u>	
2.1	Le problème de Dirichlet	130
i)	a_0 et a_1 inconnus, dépendant du temps, observation répartie	130
ii)	a_1 seul _____	131
iii)	_____ indépendants _____	134
iv)	_____ Observation ponctuelle	136
v)	_____ finale	140
2.2	Le problème de Neumann	141
i)	a_1 et a_0 inconnus, dépendant du temps, observation répartie	141
ii)	_____ indépendants _____	141
iii)	a_1 seul _____ Observation ponctuelle	142
3	<u>EQUATIONS HYPERBOLIQUES DU 2ème ORDRE</u>	147
i)	a_1 et a_0 inconnus, observation répartie	148
ii)	a_0 seul _____	149
iii)	a_1 seul _____	150
iv)	a_1 et a_0 inconnus, observation ponctuelle	151
v)	a_0 seul _____	154
vi)	a_1 seul _____	155

1.

EQUATIONS ELLIPTIQUES LINEAIRES.

Nous avons traité deux types de problèmes du type " diffusion " à 2 dimensions d'espace, avec des conditions au bord du type Neumann ou Dirichlet

1.1 Problème de Neumann

Ici :

$$(1.1) \quad \Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2 \quad \Gamma = \text{bord de } \Omega$$

On considère le système :

$$(1.2) \quad - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_1(x) \frac{\partial y}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(a_1(x) \frac{\partial y}{\partial x_2} \right) + a_0(x) y = f(x) \quad \text{dans } \Omega$$

$$(1.3) \quad a_1(x) \frac{\partial y}{\partial \nu} = g(x) \quad \text{sur } \Gamma$$

où :

$$(1.4) \quad \begin{cases} a_1(x) \text{ et/ou } a_0(x) \text{ sont des fonctions de } (x_1, x_2) \text{ à déterminer} \\ f(x) \text{ et } g(x) \text{ sont donnés} \end{cases}$$

Le système (1.2) (1.3) est approché par différence finie de façon classique (cf CEA [6], RAVIART [23]) et est résolu, pour a_0 et a_1 donnés, par une méthode de surrelaxation ($\rho = 1,9$). Le nombre n_r d'itérations de surrelaxation est déterminé par :

$$(1.5) \quad \begin{cases} n_r = 500 \\ \delta_{n_r} \leq \varepsilon_r \quad \text{où} \quad \delta_n = \sup_{i,j} |y_{ij}^n - y_{ij}^{n-1}| \end{cases}$$

où ε_r est un paramètre à notre disposition dans le sous programme d'intégration.

Remarque 1.1. Quel que soit le type d'observation, le gradient de J s'écrit

$$(1.6) \quad \frac{\partial J}{\partial a_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \times \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \times \frac{\partial p}{\partial x_2}$$

où p est solution d'un état adjoint défini de façon adaptée à l'observation (cf chap. II).

On sera donc amené, pour calculer $\frac{\partial J}{\partial a_1}$, à évaluer en chaque point de discrétisation de a_1 , les dérivées de y et p à l'aide de différences finies. Or la figure 1 montre qu'il y aura un problème pour les



. points de discrétisation
de y, p, f, a_0

x points de discrétisation
de a_1

Figure 1

Grille de discrétisation
du programme intégrant (1.2)(1

points de discrétisation de a_1 situés aux quatre coins du carré Ω . Après un certain nombre de tâtonnements, la formule suivante a été adoptée : on approxime $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ en un coin de Ω par la valeur de $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ au point de discrétisation de a_1 la plus proche dans la $i^{\text{ème}}$ direction. ■

Le test d'arrêt de la méthode de gradient est le suivant (n_g = nombre d'itérations de gradient)

$$(1.7) \quad \gamma_{n_g} \leq \varepsilon_g \quad \text{où} \quad \gamma_n = J(a^{n-1})^{\frac{1}{2}} - J(a^n)^{\frac{1}{2}}$$

où ε_g est à notre disposition dans le programme principal.

Nous n'avons traité ici que le cas d'une observation répartie.

On s'est donné a priori l'observation :

$$(1.8) \quad z_d(x_1, x_2) = x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1)$$

et les coefficients exacts a_0 et a_1 :

$$(1.9) \quad a_{0 \text{ exact}}(x_1, x_2) = 2 \quad a_{1 \text{ exact}}(x_1, x_2) = 1 + x_1 + x_2$$

d'où on a déduit les seconds membres f et g :

$$(1.10) \quad \begin{aligned} f(x_1, x_2) &= -6x_1 - 6x_2 - 2 + 2 [x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1)] \\ g(0, x_2) &= 1 + x_2 & g(1, x_2) &= 2 + x_2 \\ g(x_1, 0) &= 1 + x_1 & g(x_1, 1) &= 2 + x_1 \end{aligned}$$

i) Identification de a_0 et a_1 :

Nous ne sommes pas ici dans un cas d'unicité (d'après le théorème 5.1 du chapitre II, dès qu'on choisit a_0 , a_1 est déterminé de façon unique). On ne doit donc pas s'attendre à retrouver (1.9). Nous avons fait fonctionner l'algorithme pour vérifier qu'il convergeait bien vers une solution du problème d'identification.

Le pas discrétisation était égal dans les deux directions à $1/20$:

$$h = h_1 = h_2 = 0,05$$

Les paramètres du programme étaient $\varepsilon_r = 10^{-4}$ et $\varepsilon_g = 10^{-6}$.

En 6 itérations et 17 mm de CII 10070, l'erreur quadratique moyenne discrète δ_y sur y est passée de 0,387 à 0,0753, pour une initialisation $a_0^0 = 1 = \text{cste}$, $a_1^0 = 2 = \text{cste}$. L'allure des coefficients a_0 et a_1 correspondants est représenté dans le tableau 1. On constate qu'ils sont bien différents de $a_{0 \text{ exact}} = 2$ et de $a_{1 \text{ exact}} = 1 + x_1 + x_2$.

1.000	2.423	2.769	3.024	3.187	3.297	3.322	3.300	3.206	3.043	2.824	2.522	2.143	1.671	1.094	.472	.187	.594	1.094	1.522	2.000
.781	2.264	2.418	2.885	3.068	3.189	3.237	3.231	3.161	3.029	2.842	2.590	2.274	1.893	1.440	.919	.455	.486	.970	1.486	2.022
.708	2.203	2.557	2.827	3.015	3.150	3.210	3.218	3.172	3.060	2.898	2.682	2.404	2.066	1.661	1.179	.653	.414	.829	1.425	2.011
.675	2.207	2.569	2.840	3.032	3.168	3.242	3.256	3.222	3.131	2.984	2.788	2.536	2.220	1.837	1.371	.817	.379	.684	1.343	1.970
.682	2.251	2.620	2.895	3.090	3.229	3.308	3.330	3.303	3.223	3.090	2.904	2.664	2.362	1.989	1.530	.960	.384	.550	1.257	1.922
.734	2.328	2.703	2.979	3.174	3.313	3.395	3.420	3.398	3.324	3.198	3.018	2.784	2.489	2.122	1.664	1.083	.420	.445	1.186	1.884
.792	2.412	2.797	3.074	3.271	3.407	3.491	3.517	3.494	3.424	3.300	3.123	2.891	2.599	2.232	1.772	1.185	.472	.383	1.144	1.868
.849	2.491	2.884	3.165	3.365	3.500	3.583	3.611	3.586	3.515	3.392	3.214	2.981	2.689	2.320	1.855	1.264	.526	.367	1.136	1.879
.906	2.564	2.962	3.245	3.446	3.582	3.663	3.691	3.666	3.592	3.469	3.286	3.053	2.756	2.383	1.915	1.318	.574	.397	1.164	1.917
.950	2.624	3.028	3.313	3.515	3.648	3.727	3.753	3.726	3.650	3.535	3.329	3.105	2.803	2.441	1.950	1.349	.615	.467	1.227	1.979
.978	2.667	3.076	3.364	3.567	3.700	3.775	3.798	3.767	3.686	3.473	3.473	3.136	2.827	2.441	1.962	1.359	.652	.573	1.320	2.064
.992	2.695	3.111	3.398	3.601	3.733	3.805	3.824	3.791	3.704	3.473	3.473	3.140	2.826	2.437	1.952	1.351	.691	.708	1.440	2.170
.993	2.709	3.129	3.417	3.619	3.749	3.818	3.832	3.796	3.706	3.483	3.363	3.121	2.805	2.411	1.923	1.329	.739	.866	1.579	2.289
.983	2.710	3.134	3.423	3.622	3.750	3.814	3.824	3.782	3.690	3.466	3.343	3.086	2.765	2.366	1.878	1.299	.803	1.035	1.728	2.416
.963	2.701	3.129	3.417	3.613	3.737	3.797	3.801	3.752	3.653	3.450	3.229	3.034	2.708	2.307	1.822	1.268	.885	1.204	1.879	2.548
.939	2.687	3.117	3.405	3.597	3.716	3.770	3.765	3.709	3.601	3.442	3.229	2.962	2.633	2.232	1.757	1.242	.978	1.361	2.020	2.671
.901	2.666	3.099	3.381	3.561	3.661	3.694	3.667	3.584	3.451	3.267	3.036	2.753	2.417	2.024	1.581	1.218	1.068	1.492	2.132	2.769
.901	2.674	3.108	3.384	3.551	3.637	3.653	3.607	3.503	3.348	3.143	2.891	2.592	2.243	1.852	1.431	1.113	1.139	1.580	2.194	2.824
.925	2.712	3.143	3.407	3.556	3.622	3.613	3.541	3.407	3.217	2.974	2.679	2.339	1.953	1.537	1.137	.938	1.119	1.509	1.987	2.888
.000	2.798	3.213	3.454	3.579	3.615	3.577	3.464	3.286	3.033	2.715	2.311	1.824	1.244	.544	.105	.482	.847	1.146	1.518	2.000

Coefficient a_1

1.604	1.588	1.580	1.573	1.574	1.592	1.595	1.619	1.654	1.699	1.755	1.818	1.888	1.961	2.036	2.108	2.174	2.226	2.260	2.270	2.254	2.216
1.595	1.579	1.573	1.567	1.574	1.592	1.592	1.618	1.656	1.705	1.765	1.833	1.909	1.990	2.073	2.155	2.231	2.296	2.343	2.364	2.353	2.316
1.586	1.569	1.563	1.567	1.574	1.584	1.584	1.613	1.654	1.707	1.771	1.844	1.926	2.013	2.104	2.194	2.280	2.356	2.415	2.445	2.440	2.403
1.576	1.557	1.551	1.556	1.564	1.575	1.575	1.606	1.649	1.706	1.773	1.851	1.938	2.032	2.129	2.227	2.322	2.407	2.475	2.515	2.515	2.478
1.564	1.544	1.538	1.544	1.554	1.564	1.564	1.596	1.643	1.702	1.773	1.855	1.947	2.046	2.149	2.254	2.355	2.448	2.524	2.572	2.576	2.539
1.553	1.532	1.525	1.531	1.542	1.552	1.552	1.582	1.634	1.696	1.770	1.856	1.952	2.055	2.164	2.274	2.381	2.479	2.562	2.616	2.624	2.587
1.542	1.520	1.513	1.519	1.530	1.540	1.540	1.570	1.626	1.690	1.768	1.855	1.954	2.061	2.173	2.287	2.399	2.502	2.588	2.647	2.657	2.620
1.533	1.510	1.502	1.509	1.520	1.530	1.530	1.560	1.618	1.683	1.761	1.852	1.954	2.063	2.178	2.295	2.409	2.515	2.604	2.665	2.677	2.639
1.526	1.502	1.493	1.500	1.510	1.520	1.520	1.550	1.609	1.676	1.756	1.848	1.951	2.062	2.179	2.297	2.413	2.520	2.610	2.670	2.682	2.644
1.521	1.496	1.487	1.493	1.503	1.513	1.513	1.543	1.602	1.670	1.751	1.843	1.947	2.058	2.175	2.294	2.410	2.516	2.605	2.664	2.674	2.634
1.520	1.494	1.484	1.490	1.500	1.510	1.510	1.540	1.599	1.666	1.745	1.837	1.941	2.051	2.167	2.285	2.399	2.503	2.590	2.645	2.652	2.612
1.521	1.494	1.483	1.488	1.498	1.508	1.508	1.538	1.597	1.664	1.743	1.833	1.937	2.047	2.163	2.280	2.394	2.498	2.585	2.640	2.648	2.608
1.526	1.498	1.486	1.490	1.498	1.508	1.508	1.538	1.597	1.664	1.743	1.833	1.937	2.047	2.163	2.280	2.394	2.498	2.585	2.640	2.648	2.608
1.534	1.504	1.492	1.494	1.502	1.512	1.512	1.542	1.601	1.668	1.747	1.837	1.941	2.051	2.167	2.285	2.399	2.503	2.590	2.645	2.652	2.612
1.544	1.514	1.500	1.501	1.509	1.519	1.519	1.549	1.608	1.675	1.754	1.844	1.948	2.058	2.174	2.290	2.404	2.508	2.595	2.650	2.658	2.618
1.558	1.527	1.511	1.511	1.519	1.529	1.529	1.559	1.618	1.685	1.764	1.854	1.958	2.068	2.184	2.300	2.414	2.518	2.605	2.660	2.668	2.628
1.574	1.542	1.524	1.524	1.532	1.542	1.542	1.572	1.631	1.698	1.777	1.867	1.971	2.081	2.197	2.313	2.427	2.531	2.618	2.673	2.681	2.641
1.594	1.559	1.539	1.539	1.547	1.557	1.557	1.587	1.646	1.713	1.792	1.882	1.986	2.096	2.212	2.328	2.442	2.546	2.633	2.688	2.696	2.656
1.616	1.579	1.556	1.556	1.564	1.574	1.574	1.604	1.663	1.730	1.809	1.899	1.999	2.109	2.225	2.341	2.455	2.559	2.646	2.701	2.709	2.669
1.641	1.601	1.575	1.575	1.583	1.593	1.593	1.623	1.682	1.749	1.828	1.918	2.018	2.128	2.244	2.359	2.473	2.577	2.664	2.719	2.727	2.687

Coefficient a_0

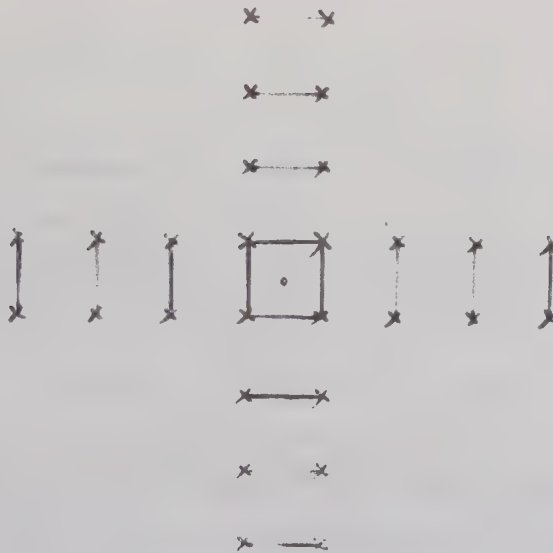
ii) Identification de a_1 seul

On suppose ici $a_0(x)$ connu et fixé égal à 2.

Le théorème 5.1 du chapitre II s'applique alors, et on doit donc qu'il y a une fonction $a_1 \in L^\infty(\Omega)$ unique telle que (1.2) ait lieu avec (1.8)

(1.10). On espère donc retrouver $a_{1\text{exact}}$ donné par (1.9).

Remarque 1.2 : La remarque 5.3 du chapitre II se généralise facilement à deux dimensions. Les solutions $a(x)$ qui ne sont pas dans $L^\infty(\Omega)$ seront ici des "hélices" ayant pour axe le point où z_d est minimum. Pour essayer d'éliminer ces solutions parasites, on impose au coefficient $a_1(x)$ des conditions supplémentaires suivantes (cf. Fig 2)



Les traits relient les points où l'on impose à $a_1(x)$ de prendre des valeurs égales.

- point où z_d atteint sont minimum.

Figure 2

Le gain ainsi obtenu est illustré le tableau 2⁽¹⁾

$h = \frac{1}{19}$ $\varepsilon_r = 10^{-7}$ $\varepsilon_g = 10^{-7}$ $a_1^0(x) = 2 = \text{cste}$			
	Valeur Initiale	Solution avec les conditions supplémentaires de la Fig 2	Solution sans les conditions supplémentaires de la Fig 2
$n_g = \text{nb.ité.grad.}$		22	43
δy	0,024	0,00029	0,00029
δa_1	0,42	0,177	0,20
Temps de calcul IBM 360 - 91		2mn 42, 20 s	4 mn 6,43 s

Tableau 2

On a donc réduit de moitié environ le nombre d'itérations et le temps de calcul. Cette astuce sera utilisée dans toute la suite de cet exemple (sauf bien sûr lorsqu'on cherchera $a_1(x)$ sous forme paramétrique !). ■

Nous avons ensuite étudié l'influence, sur la solution, de l'initialisation a_1^0 de l'algorithme (cf Tableau 3). Pour $a_1^0 = 6$, l'algorithme n'a pas convergé.

(¹) Dans la suite δy , δa_0 , δa_1 représenteront toujours l'erreur quadratique moyenne sur y , a_0 et a_1 (sauf au § 1.2)

On constate que, bien que du point de vue de la convergence la plage de départ admissible soit relativement large, les temps de calculs croissent, la rapidité de convergence et la précision de l'algorithme diminuent rapidement dès que la valeur initiale a_1^0 s'écarte de la " valeur moyenne " 2 du coefficient a_1 .

$h = \frac{1}{19}$, $\epsilon_r = 10^{-7}$, conditions de la Fig. 2					
	$a_1^0 = 0,5$	$a_1^0 = 2$	$a_1^0 = 3$	$a_1^0 = 4$	$a_1^0 = 5$
ϵ_g	$2.55 \cdot 10^{-4}$	10^{-7}	10^{-7}	$3 \cdot 10^{-5}$	10^{-7}
$n_g = \text{nb.ité.grad.}$	23	22	28	16	7
δ_y {	initiale	0,29	0,024	0,038	0,053
	finale	0,0038	0,00029	0,0013	0,0049
δ_{a_1} {	initiale	1,46	0,45	1,01	1,93
	finale	0,27	0,177	0,21	0,58
Temps de calculs IBM 360-91	4mn 18,19s	2mn 42,20s	4mn 4,4 s	3mn 16,39s	1mn 50,44s

Tableau 4

Remarque 1.3 : Par contre, si l'on cherche le coefficient a_1 sous forme d'une constante, on constate (cf. tableau 5) que l'on converge rapidement vers une " valeur moyenne " de a_1 . La méthode naturelle pour identifier a_1 , lorsqu'on n'a aucune idée de son ordre de grandeur est donc d'opérer en deux phases:

- 1ère phase : chercher a_1 sous forme constante
- 2ème phase : utiliser le résultat de la 1ère phase comme valeur initiale a_1^0 , et chercher a_1 en le laissant libre. ■

$h = \frac{1}{19}$, $\varepsilon_r = 10^{-7}$, $\varepsilon_g = 10^{-7}$, Cond. de la Fig.2			
	$a_1^0 = 3$	$a_1^0 = 4$	
Valeur de a_1 fournie par l'algorithme	2,111	2,113	
n_g = nb. ité. grad.	3	4	
δy {	initiale	0,038	0,053
	finale	0,023	0,023
δa_1 {	initiale	1,01	1,93
	finale	0,38	0,38
Temps de calcul IBM 360-91	47 s	1mn 1,2 s	

Tableau 5
Identification de a_1 sous forme d'une constante

Remarque 1.4 : Dans le cas particulier étudié ici (problème de Neumann non homogène, observation répartie), on aurait pu obtenir des résultats certainement meilleurs en utilisant le fait que la connaissance de $g(x)$, de $z_d(x)$ permettait, grâce à (1.3), de calculer $a_1(x)$ sur le bord de Ω , et en ne cherchant a_1 que sur les points intérieurs à Ω (ce qui éliminait le problème évoqué à la remarque 1.1). Nous ne l'avons pas fait car cette méthode nécessite le calcul de dérivées de z_d , qui dans le cas de problèmes réels, risquent d'être peu significatives par suites des erreurs de mesures sur l'observation. ■

L'allure du coefficient a_1 calculé selon la technique de la remarque 1.3 (c'est-à-dire correspondant à la 2ème colonne du tableau 4) est donné par la figure 3

On constate que ce coefficient est très voisin de a_1 exact, sauf sur les bords du domaine Ω . Ceci s'explique par le fait que l'état adjoint vérifie la condition sur le bord

(1.11) $\frac{\partial p}{\partial \nu} = 0$

ce qui fait que les bords de Γ étant parallèles aux axes, il y a toujours dans (1.6) un des termes du second membre qui est nul, donc le gradient sur le bord est petit

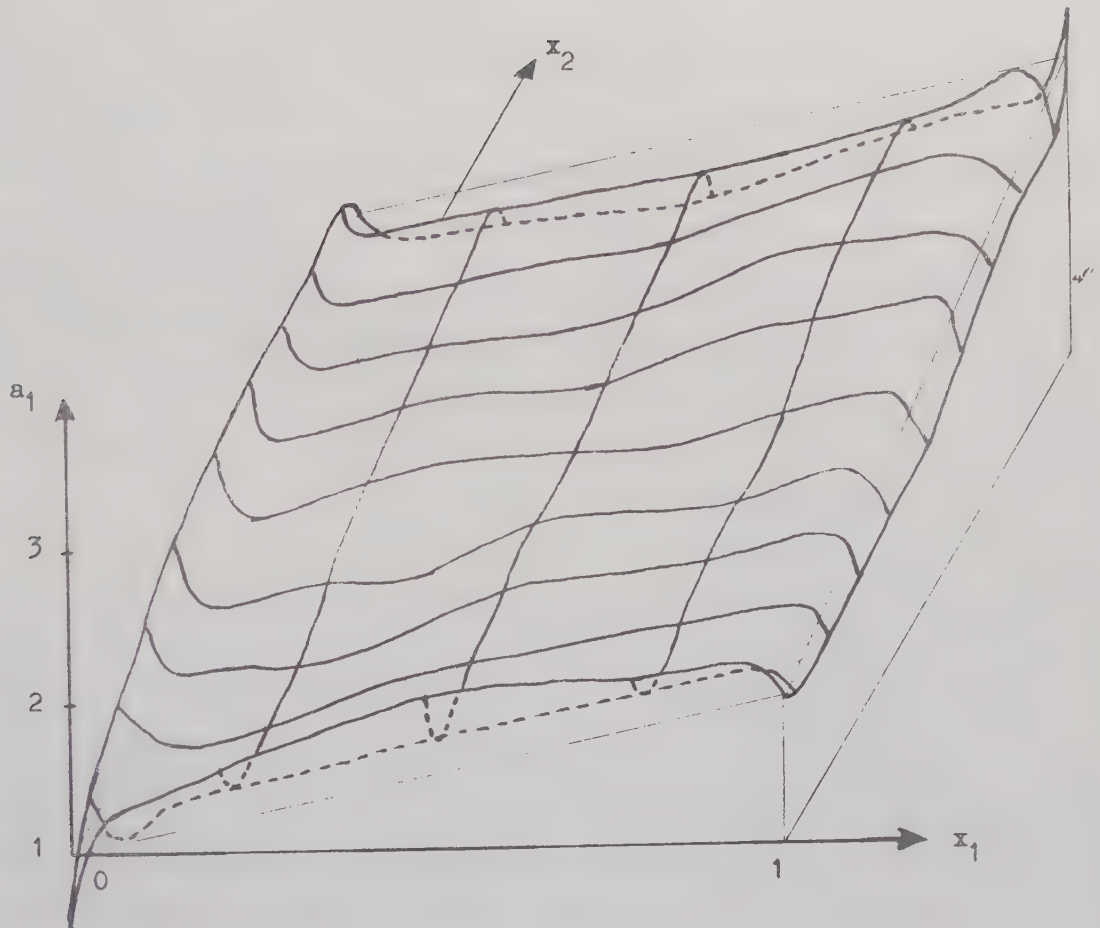


Figure 3

Le coefficient a_1 calculé par l'algorithme

(Problème de Neumann)

iii) Identification de a_1 sous forme paramétrique

Nous avons ensuite cherché à déterminer le coefficient $a_1(x)$ sous la forme d'un polynôme.

$$(1.12) \quad a_1(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1 x_2 + \alpha_5 x_1^2 + \alpha_6 x_2^2$$

ce qui ne présente pas de difficulté, la connaissance de $\frac{\partial J}{\partial a_1}(x)$ permettant de calculer, à l'aide d'une quadrature, la dérivée $\frac{\partial J}{\partial \alpha_i}$ $i = 1, 2, \dots, 6$.

Les résultats de ces expériences sont consignées dans le tableau 6. On constate une très nette amélioration sur la précision de $a_1(x)$ (cf. tableau 4).

Par contre la précision obtenu sur y est moins bonne. Cela s'explique par le fait que le sous programme d'intégration ne résout pas exactement (1.2) (1.3), mais un système approché.

iv) Influence du bruit sur l'observation.

Bien que nous n'ayons pas étudié les propriétés statistiques de notre estimateur, il nous a semblé intéressant de vérifier numériquement la sensibilité de l'algorithme au bruit sur l'observation. Cette étude ne peut se faire en laissant $a_1(x)$ libre, car il y a alors environ autant de paramètres à identifier que de points d'observation, et le bruit passerait alors dans le coefficient a_1 si on poussait assez loin la minimisation de J . Par contre, lorsque a_1 est recherché sous forme d'un polynôme du 2ème degré, on peut attendre de l'algorithme un effet de lissage, ce que confirment les résultats consignés dans les tableaux 6 bis et 6 ter (l'observation z_d était de la forme $\left[x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1) \right] (1 + \eta)$ où η est une variable aléatoire Gaussienne centrée d'écart quadratique moyen égal à 0,01 ou 0,1 selon le cas).

$h = \frac{1}{19}$, $\varepsilon_r = 10^{-7}$			
Degré du polynôme d'approximation	0	1	2
ε_g	10^{-3}	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
$n_g = \text{nb.ité.grad.}$	4	24	3
$a_1(x)$	initial	4	$2,113 + 0 \times x_1 + 0 \times x_2$ $1,06 + 0,92x_1 + 0,92x_2$ $+ 0 \times x_1x_2 + 0 \times x_1^2 + 0 \times x_2^2$
	finale	2,113	$1,05 + 0,97x_1 + 0,97x_2$ $0,018x_1x_2 + 0,02x_1^2 + 0,02x_2^2$
δ_y	initiale	0,053	0,023
	finale	0,023	0,0020
δa_1	initiale	1,93	0,38
	finale	0,38	0,033
Temps de Calcul IBM 360-91	1mn 1,2 s	4 mn 36, 55 s	

Tableau 6

Identification de a_1 sous forme paramétrique
pas de bruit

$h = \frac{1}{19}$, $\epsilon_r = 10^{-7}$, $\epsilon_g = 3.10^{-4}$, 1 % de bruit sur z_d		
Degré du polynôme d'approximation	1	2
$a_1(x)$ initial final	2,113 $1,11 + 0,876x_1 + 0,870x_2$	$1,11 + 0,876x_1 + 0,870x_2$ $1,06 + 0,905x_1 + 0,899x_2 + 0,031x_1x_2 + 0,034(x_1^2 + x_2^2)$
δ_y initiale finale	0,023 0,0032	0,0032 0,0019
δa_1 initiale finale	0,38 0,049	0,049 0,018
δy (par rapport à z_d non bruité) initiale finale	0,023 0,0032	0,0032 0,0015
$n_g = \text{nb.ité.grad}$	19	3
Temps de Calcul IBM - 360.91	4 mn 15,68 s	

Tableau 6 bis

Identification de a_1 sous forme paramétrique1 % de bruit

$h = \frac{1}{19}$, $\epsilon_r = 10^{-7}$, $\epsilon_g = 3.10^{-4}$, 10 % de bruit sur z_d		
Degré du polynôme d'approximation	1	2
$a_1(x)$ {	initial	2,113
	final	$1,02 + 0,974x_1 + 0,913x_2$
δy {	initial	$1,02 + 0,974x_1 + 0,913x_2$
	final	$0,995 + 0,991x_1 + 0,930x_2 + 0,020x_1x_2 + 0,023(x_1^2 + x_2^2)$
δa_1 {	initial	0,027
	final	0,012
$\delta y(\text{par rapport à } z_d \text{ non bruitée})$ {	initial	0,027
	final	0,012
$n_g = \text{nb.ité.grad}$	initial	0,38
	final	0,042
$\delta y(\text{par rapport à } z_d \text{ non bruitée})$ {	initial	0,042
	final	0,026
$n_g = \text{nb.ité.grad}$	initial	0,023
	final	0,0022
$\delta y(\text{par rapport à } z_d \text{ non bruitée})$ {	initial	0,0022
	final	0,0015
Temps de Calcul IBM 360-91		
2 mn 54, 21 s		

Tableau 6 ter
Identification de a_1 sous forme paramétrique
10 % de bruit.

On constate que les résultats sur a_1 sont encore bons, et qu'on obtient en même temps un lissage de l'observation. L'algorithme est donc peu sensible au bruit.

1.2 Problème de Dirichlet non homogène

On considère ici le système :

$$(1.13) \quad -\frac{\partial}{\partial x_1} (a_1(x) \frac{\partial y}{\partial x_1}) - \frac{\partial}{\partial x_2} (a_1(x) \frac{\partial y}{\partial x_2}) = f(x) \quad \text{dans } \Omega$$

$$(1.14) \quad y = g \quad \text{sur } \Gamma$$

où :

$$(1.15) \quad \begin{cases} a_1(x) \text{ est une fonction de } x_1 \text{ et } x_2 \text{ à déterminer} \\ f(x) \text{ et } g(x) \text{ sont donnés} \end{cases}$$

Le système (1.13) (1.14) est approché par différences finies et est résolu, pour a_1 donné, par surrelaxation ($\rho = 1,7$). Le test d'arrêt du sous-programme d'intégration est :

$$(1.16) \quad \delta_{n_r} \leq \varepsilon_r \quad \text{où} \quad \delta_n = \sum_{i,j} \left| y_{ij}^n - y_{ij}^{n-1} \right|$$

où ε_r est à fixer.

Le test d'arrêt de la méthode de gradient est :

$$(1.17) \quad \gamma_{n_g} \leq \varepsilon_g \quad \text{où} \quad \gamma_n = \left| \sum_{i,j} \left| y_{ij}^n - z_{d_{ij}} \right| - \sum_{i,j} \left| y_{ij}^{n-1} - z_{d_{ij}} \right| \right|$$

Nous n'avons traité ici que le cas d'une observation répartie, d'abord sur un exemple scolaire, puis sur un exemple réel :

i) Exemple scolaire : On s'est donné a priori l'observation :

$$(1.18) \quad z_d(x_1, x_2) = (a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1) (a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + c_2)$$

et le coefficient exact

$$(1.19) \quad a_1 \text{ exact}(x) = 1,25 + x + y$$

d'où on a déduit f et g .

On a voulu ici étudier l'influence, sur l'identification de a_1 , de la forme de l'observation $z_d(x_1, x_2)$.

On a pris successivement le maximum de $z_d(x_1, x_2)$ aux points :

- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$: on est dans le cas d'application du théorème d'unicité
- $(0, 0)$: on n'est plus dans le cas d'application du théorème d'unicité.
- $(-1, -3)$: on n'est plus dans le cas d'application du théorème d'unicité.

$h = \frac{1}{20} \quad \epsilon_r = 10^{-3}$			
Position du Maximum de z_1	(0,5, 0,25)	(0,0)	(-1, -3)
ϵ_g	0,001	0,0001	0,0001
$n_g = \text{nb.ité.grad.}$	60	90	124
$a_1^0(x)$	1.	1.	2.
Valeur de a_1 fournie par l'algorithme	cf. tab.8 et Fig.4	cf.tab.9	cf.tab.10
δ_y $\left\{ \begin{array}{l} \text{initiale} \\ \text{finale} \end{array} \right.$	0,84	0,026	0,023
	0,0017	0,00012	0,00011
Temps de Calcul IBM 360-91	2mn 30s	1mn 50, 3 s	1mn 48,5 s

Tableau 7

Les résultats sont consignés dans les tableaux 7 à 10 et la figure 4 .

On constate que l'algorithme converge dans tous les cas. Les résultats sont même un peu meilleurs lorsqu'on n'est pas dans le cas du théorème d'unicité (tableaux 9 et 10).

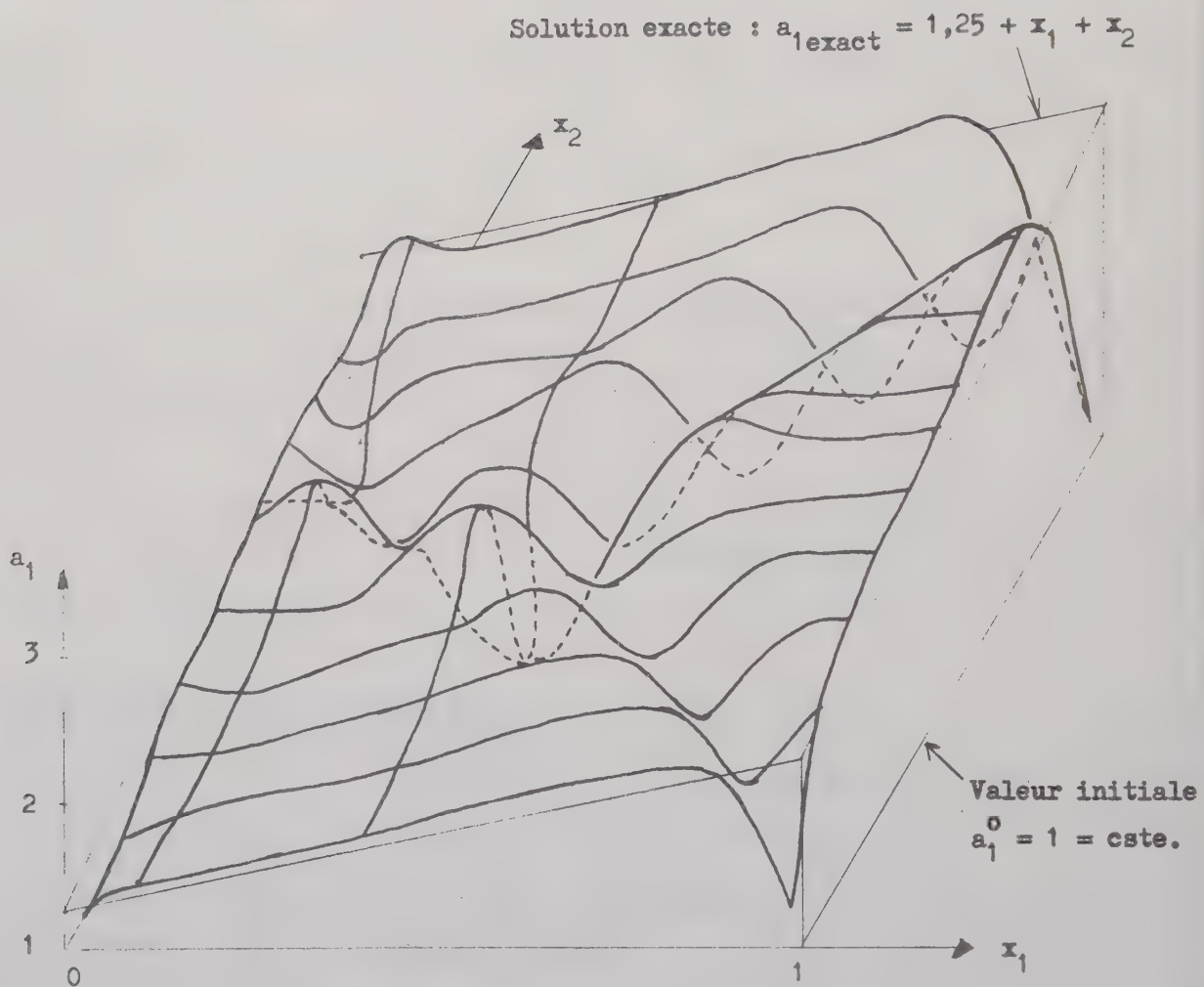


Figure 4

Le coefficient a_1 calculé par l'algorithme

Problème de Dirichlet. Maximum de z_d au point $(1/2, 1/4)$

j \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	- 0,100	- 0,023	0,004	0,013	0,029	0,052	0,074	0,066	0,042	- 0,450
1	- 0,064	- 0,003	- 0,003	0,016	0,038	0,078	0,085	0,127	- 0,299	- 0,889
2	0,017	- 0,033	0,001	0,029	0,073	0,118	0,170	- 0,269	- 0,818	0,045
3	0,082	- 0,087	0,016	0,055	0,184	0,205	- 0,281	- 0,235	0,094	0,036
4	0,095	0,042	0,012	0,377	0,389	- 0,184	- 0,038	0,089	0,043	0,035
5	0,137	0,345	- 0,223	- 0,826	- 1,166	- 0,431	0,242	0,159	0,018	0,021
6	0,203	- 0,167	- 0,182	0,252	0,269	- 0,336	- 0,661	0,011	0,149	0,051
7	0,210	- 0,227	0,024	- 0,047	0,122	0,263	- 0,155	- 0,732	- 0,080	0,126
8	0,018	- 0,024	- 0,009	0,006	0,004	0,102	0,231	- 0,123	- 0,850	- 0,228
9	- 0,340	0,015	- 0,011	0,003	0,019	0,047	- 0,106	0,185	- 0,215	- 0,122

Tableau 8

Problème de Dirichlet (Maximum de z_d au point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$)

Différences $a_1 - a_{1\text{exact}}$ aux points $(\frac{1}{4} + \frac{i}{10}, \frac{1}{4} + \frac{j}{10})$

j \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	- 0,828	0,291	0,306	0,384	0,378	0,321	0,213	0,068	- 0,100	- 0,251
1	0,291	- 0,671	0,174	0,009	0,049	0,064	0,076	0,074	0,049	- 0,005
2	0,306	0,174	- 0,535	0,186	0,009	- 0,010	- 0,014	- 0,009	- 0,004	- 0,007
3	0,384	0,009	0,186	- 0,530	0,179	0,045	0,014	0,004	0,002	0,003
4	0,378	0,049	0,009	0,179	- 0,549	0,163	0,061	0,029	0,015	0,012
5	0,321	0,064	- 0,010	0,045	0,163	- 0,584	0,143	0,072	0,046	0,032
6	0,213	0,076	- 0,14	0,014	0,061	0,143	- 0,637	0,114	0,073	0,061
7	0,068	0,074	- 0,009	0,004	0,029	0,072	0,114	- 0,722	0,069	0,054
8	- 0,100	0,049	- 0,004	0,002	0,015	0,046	0,073	- 0,069	- 0,869	- 0,027
9	- 0,251	- 0,005	- 0,007	0,003	0,012	0,032	0,061	0,054	- 0,027	- 1,221

Tableau 9

Problème de Dirichlet (Maximum de z_d au point $(0,0)$)

Différences $a_1 - a_{1\text{exact}}$ aux points $(\frac{1}{4} + \frac{i}{10}, \frac{1}{4} + \frac{j}{10})$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	- 0,321	0,001	0,048	0,050	0,048	0,013	- 0,009	- 0,043	- 0,077	- 0,107
1	- 0,413	- 0,365	- 0,067	0,022	0,038	0,049	0,048	0,042	0,036	0,030
2	- 0,053	- 0,354	- 0,390	- 0,112	- 0,011	0,011	0,031	0,038	0,040	0,041
3	- 0,011	- 0,078	- 0,313	- 0,403	- 0,143	- 0,038	- 0,019	- 0,003	0,014	0,018
4	0,012	- 0,010	- 0,081	- 0,284	- 0,413	- 0,170	- 0,058	- 0,046	- 0,028	- 0,019
5	0,006	0,004	- 0,039	- 0,092	- 0,264	- 0,427	- 0,197	- 0,075	- 0,069	- 0,057
6	- 0,022	0,012	- 0,009	- 0,063	- 0,098	- 0,355	- 0,452	- 0,229	- 0,096	- 0,094
7	- 0,057	0,010	0,004	- 0,034	- 0,084	- 0,102	- 0,261	- 0,496	- 0,276	- 0,133
8	- 0,091	0,005	0,009	- 0,018	- 0,062	- 0,098	- 0,109	- 0,288	- 0,577	- 0,361
9	- 0,119	0,001	0,010	- 0,011	- 0,050	- 0,085	- 0,110	- 0,132	- 0,360	- 0,787

Tableau 10

Problème de Dirichlet (Maximum de z_d au point $(-1, -3)$)

Différences $a_1 - a_1$ exact aux points $(\frac{1}{4} + \frac{i}{10}, \frac{1}{4} + \frac{j}{10})$

- ii) Exemple réel L'équation (1.13) correspond au cas de l'exemple 2.1 du chapitre II. Les données (pressions et débits) représentées figure 5, ont été fournies par le Laboratoire d'hydrogéologie Mathématique de l'Ecole des Mines de Paris. En l'absence de tout renseignement sur l'ordre de grandeur du coefficient $a_1(x)$, on a utilisé la méthode de la remarque 1.3. Les résultats sont consignés dans le tableau 11 et les figures 6 et 7.

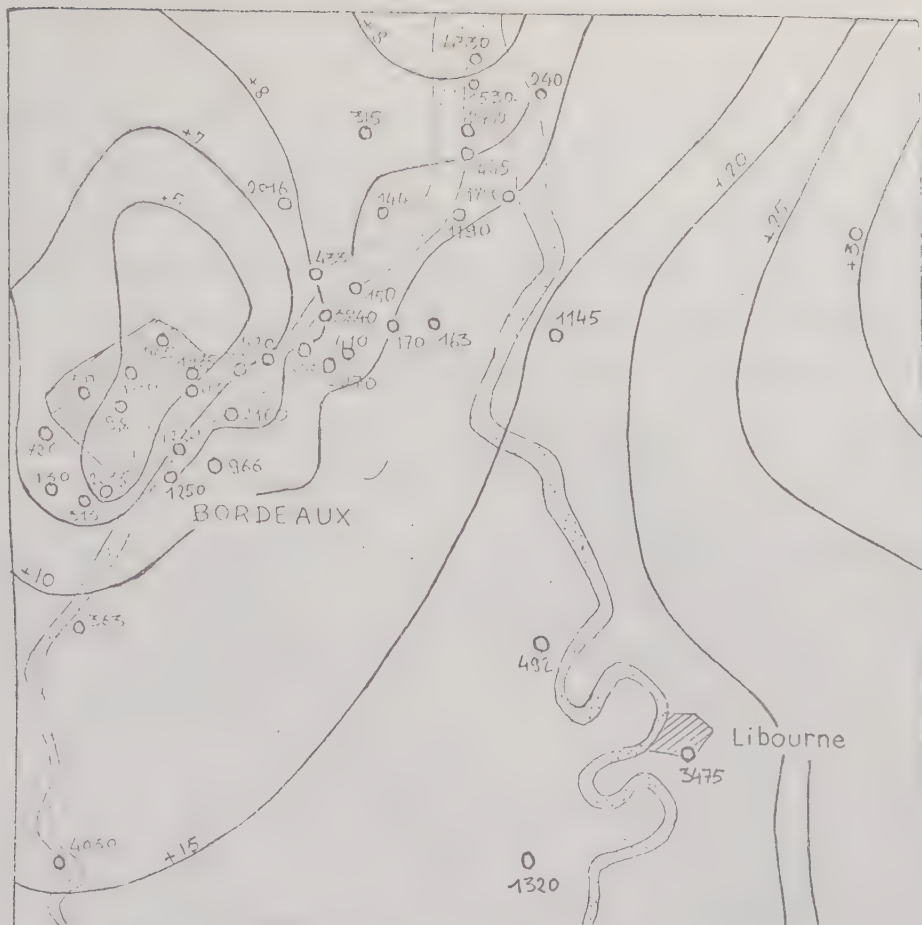


Figure 5 : Les données du problème d'identification :

- +15) Lignes isopièzes ($y = 15 = \text{cste}$)
- 1320 positions et débits des puits.

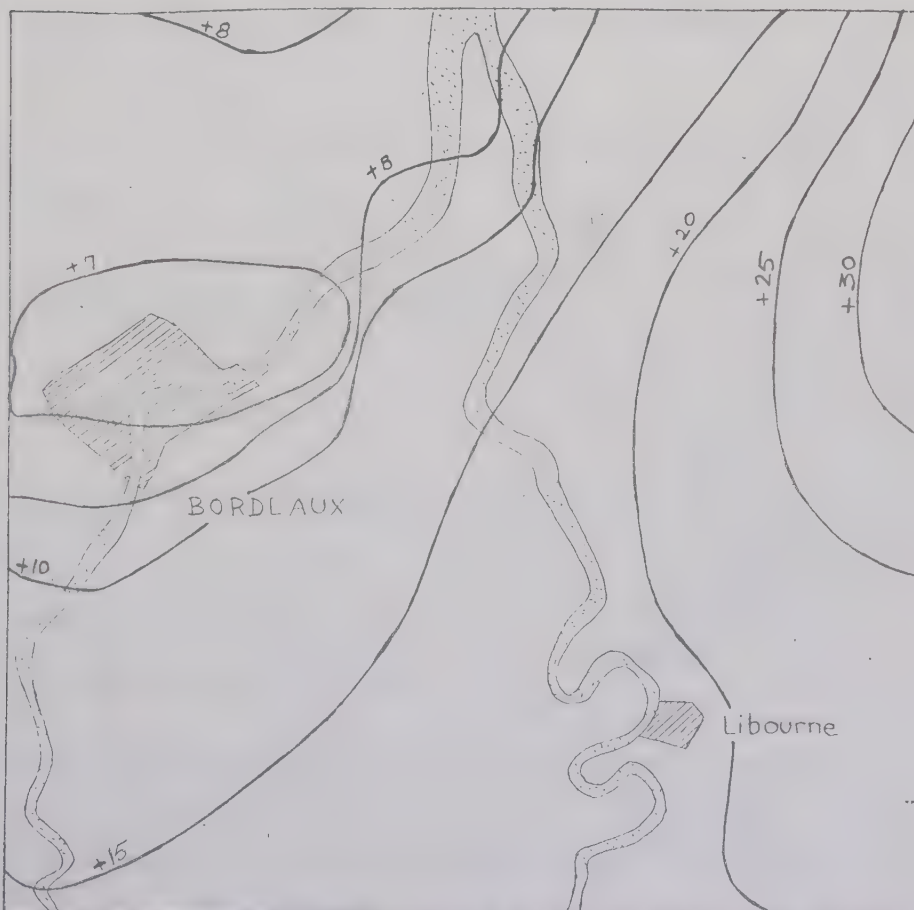


Figure 6 : Isopièzes calculées à l'aide de la transmissivité $a_1(x)$ fournie par l'algorithme

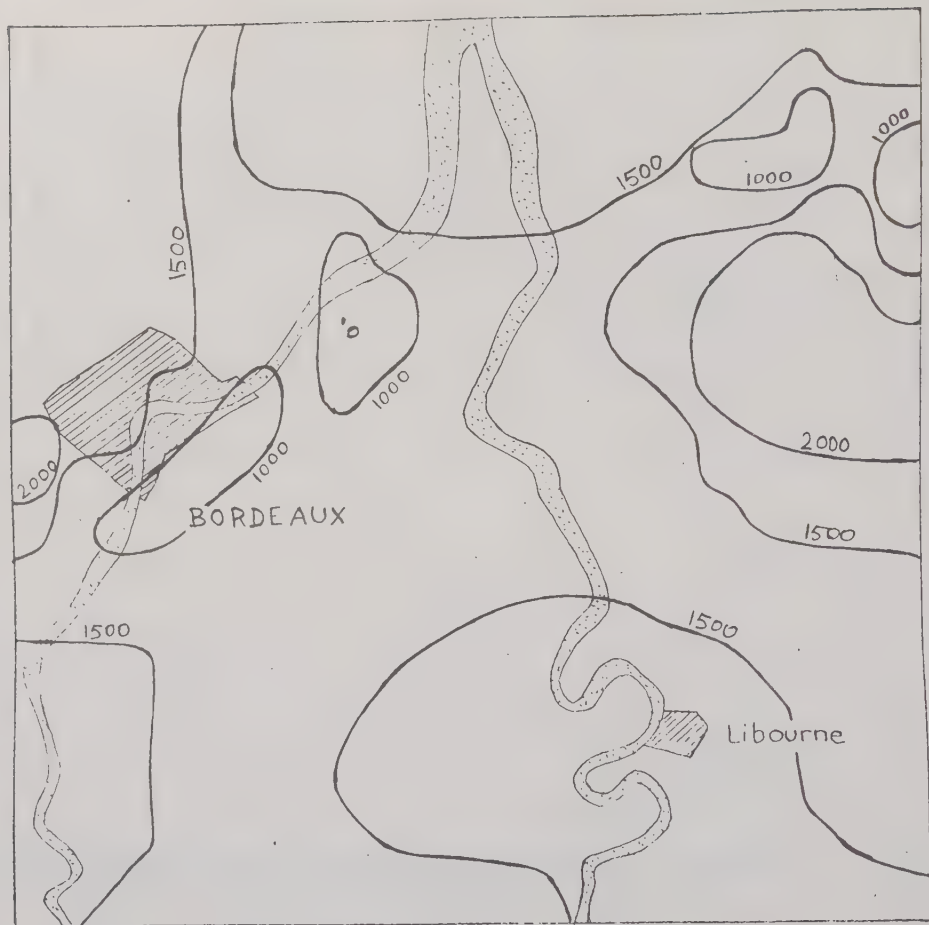


Figure 7 : Carte des transmissivités $a_1(x)$
fournies par l'algorithme .

$h = \frac{1}{20}$ $\varepsilon_r = 10^{-3}$ $\varepsilon_g = 10^{-4}$		
	1ère phase : a_1 constant	2ème phase : a_1 libre
$n_g = \text{nb. ité. grad}$	9	5
$a_1^0(x)$	150	1622
Valeur de a_1 fournie par l'algorithme	1622	cf fig. 7
$\delta_y \left\{ \begin{array}{l} \text{initiale} \\ \text{finale} \end{array} \right.$	14,3	0,72
	0,72	0,51
Temps de calcul IBM 360-91	24,63 s	22,38 s

Tableau 11

L'allure des résultats est satisfaisante du point de vue physique. Les distorsions constatées, dans la région de Bordeaux, entre les figure 5 et 6, sont dues aux erreurs de mesures, et au fait que la nappe considérée est en réalité un aquifère multicouche, dont un modèle à deux dimensions ne saurait rendre compte exactement. En outre, alors que dans les exemples scolaires la contrainte $a_1(x) \geq 0$ n'est jamais saturée, le coefficient a_1 s'annule ici en un point (marqué 0 sur la figure 7), ce qui prouve qu'il y a dans cette région une distorsion entre les données et le modèle proposé.

Un algorithme différent pour résoudre ce même problème est proposé par Y. EMSELLEM, Y. LEROLLE et G. MARSILLY [8]. Bien que les deux algorithmes n'aient pas été encore comparés sur le même exemple, les temps de calcul semblent du même ordre.

2.1 Le problème de Dirichlet

On a traité ici un problème à une dimension d'espace et une de temps :

$$(2.1) \quad \Omega =]0, 1[\quad , \quad Q =]0, 1[\times]0, T[$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (a_1(x, t) \frac{\partial y}{\partial t}) + a_0(x, t) y = f(x, t) \quad \text{dans } Q$$

$$(2.3) \quad y(0, t) = y(1, t) = 0 \quad t \in]0, T[$$

$$(2.4) \quad y(x, 0) = y_0(x) \quad x \in]0, 1[$$

Le système (2.2) (2.3) (2.4) était intégré par un schéma de Crank-Nicholson, et le sous-programme correspondant était prévu pour pouvoir intégrer au choix le système direct (2.2) (2.3) (2.4) ou le système rétrograde correspondant (système adjoint).

On a traité divers cas :

- i) a_0 et a_1 inconnus, dépendant du temps, observation répartie

c'est le cas le plus général, et d'après le théorème 5.2 du chapitre II, il n'y aura pas unicité de la solution. Nous avons donc simplement vérifié, sur l'exemple suivant, que l'algorithme donnait bien une solution du problème d'identification.

Exemple 2.1 :

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_d(x, t) = \sin \pi x e^t \\ a_1 \text{ exact}(x, t) = 1 + x + t \\ a_0 \text{ exact}(x, t) = 10 = \text{cste} \\ \text{d'où } y_0(x) \text{ et } f(x, t) \end{array} \right.$$

Le programme utilisé procédait en 4 étapes, augmentant à chaque fois le nombre de points de discrétisation en espace et en temps (h = pas en espace, k = pas en temps). On n'a pas utilisé ici de conditions supplémentaires basées sur la remarque 5.3 du chapitre II. La méthode de minimisation utilisée était la méthode de Steepest Descent. Les résultats sont consignés dans le tableau 12 (δy , δa_1 , δa_0 sont les erreurs quadratiques moyennes sur y , a_1 et a_0). On constate que l'algorithme converge bien ($\delta y \longrightarrow 0$), mais que a_1 et a_0 convergent vers une solution différente de $a_1 \text{ exact}$ et $a_0 \text{ exact}$ ($\delta a_1 \not\rightarrow 0$, $\delta a_0 \not\rightarrow 0$).

ii)

a_1 seul inconnu, dépendant du temps, Observation répartie

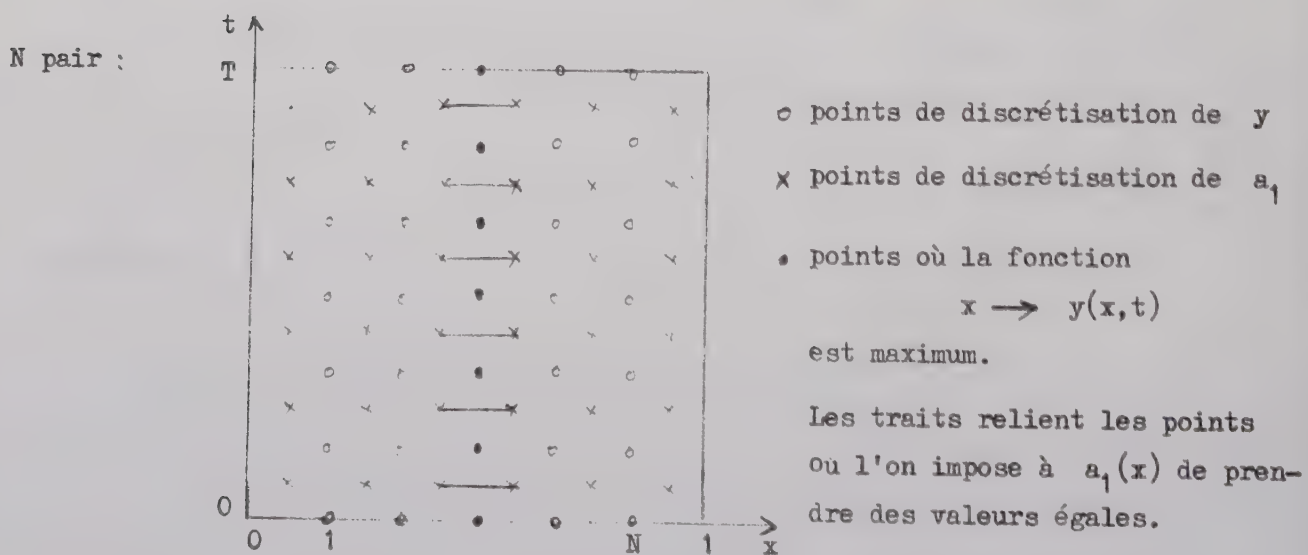
D'après le théorème 5.2 du chapitre II, il existe une solution unique
 $a_1 \in L^\infty(Q)$

Remarque 2.1 : pour trouver $a_1 \in L^\infty(Q)$ et non une solution distribution quelconque (cf remarque 5.3 chapitre II) de la "forme" $a_1 + k(t) \text{ vp } \frac{1}{x}$, on impose à $a_1(x)$ les conditions supplémentaires de la figure 8. ■

$a_1^0(x,t) = 1$, $a_0^0(x,t) = 3 + 3x$,		Steepest Descent	Pas de conditions Supplémentaires	
$h = k =$	0,20	0,10	0,067	0,05
Nombre d'itérations de gradient	10	10	30	180
δy {	initiale	1,610	0,103	0,029
	finale	0,038	0,025	0,0077
δa_1 {	initiale	1,07	0,51	0,50
	finale	0,69	0,53	0,54
δa_0 {	initiale	4,95	5,21	5,35
	finale	4,82	5,20	5,34
Temps de Calcul CAE 90-20	10 mn 58 s			

Tableau 12

Identification de $a_1(x,t)$ et $a_0(x,t)$ - Observation répartie



N impair : On a des conditions similaires.

Figure 8

Conditions Supplémentaires

L'exemple traité ici était l'exemple 2.1. Les résultats de l'algorithme sont consignés dans le tableau 13 .

$a_1^0(x,t) = 1$. Conditions supplémentaires de la Fig. 8				
$h = k =$	0,20	0,10	0,067	0,05
Méthode de gradient	Steepest Descent	Steepest Descent	Fletcher Powell	Fletcher Powell
Nombre d'itérations de gradient :	10	0	20	150
δy {	initiale	0,83	0,036	0,018
	finale	0,031	0,0045	0,00047
δa_1 {	initiale	1,07	0,12	0,082
	finale	0,10	0,075	0,025
Temps de Calcul CAE 90-80		10 mn	11 s	

Tableau 13

Identification de $a_1(x,t)$. Observation répartie

On constate que l'algorithme converge ($\delta y \rightarrow 0$) , et qu'il fournit bien pour a_1 la solution $a_{1\text{exact}}$ ($\delta a_1 \rightarrow 0$) .

Remarque 2.2 : On voit dans le tableau 13 que l'on a utilisé une méthode de FLETCHER et POWELL pour minimiser J dans les deux dernières étapes. Les expériences numériques faites pour voir le gain obtenu par cette introduction ont montré que, dans le cas de la fonctionnelle qui nous occupe, ce gain était tout à fait minime : pour le même problème et dans le même temps, l'algorithme effectue 670 itérations et donne une erreur quadratique moyenne $\delta y = 0,0015$ en utilisant FLETCHER-POWELL dans les deux dernières étapes, alors qu'il effectue 820 itérations mais ne donne que $\delta y = 0,0017$ en utilisant le Steepest-Descent à toutes les étapes. Les programmes écrits ultérieurement ont donc utilisé uniquement le Steepest-Descent. ■

iii) a_1 seul inconnu, indépendant du temps, Observation répartie

On est encore dans le cas du théorème d'unicité.

L'exemple traité est ici :

Exemple 2.2

$$(2.6) \quad \left. \begin{aligned} z_d(x, t) &= \sin \pi x e^{-t} \\ a_{1\text{exact}}(x) &= 1 + x \\ a_{0\text{exact}}(x) &= 10 \\ \text{d'où } y_0(x) &\text{ et } f(x, t) \end{aligned} \right\}$$

On a voulu voir le gain procuré par l'application de la remarque 2.1. Les résultats sont consignés dans le tableau 14 et la figure 9. On constate un gain très important (de 1 à 10) sur le temps de calcul, ainsi qu'une nette amélioration sur la précision sur a_1 .

Cette remarque sera donc utilisée dans la suite chaque fois que l'on sera dans un des cas d'unicité du chapitre II.

En ce qui concerne la plage admissible pour la valeur initiale a_1^0 , l'algorithme a convergé de $a_1^0 = 0,5$ à $a_1^0 = 5$, mais tant en ce qui concerne

$a_1^0(x) = 1$									
Application de la remarque 2.1	NON				OUI				
$h = k =$	0,20	0,10	0,067	0,005	0,20	0,10	0,067	0,005	
Méthode de gradient	Steepest Descent				Steepest Descent		Fletcher Powell		
Nombre d'Itérations de gradient	10	10	20	110	10	0	20	10	
δy {	initiale	0,377	0,043	0,013	0,0054	0,377	0,017	0,0176	0,0019
	finale	0,011	0,006	0,003	0,0007	0,012		0,0005	0,0006
δa_1 {	initiale	0,57	0,19	0,12	0,10	0,57	0,08	0,072	0,029
	finale	0,19	0,11	0,09	0,07	0,08		0,029	0,020
Temps de Calcul IBM 360 - 91	environ 25 s				2,37 s				

Tableau 14

Influence de la remarque 2.1. sur la
rapidité de convergence.

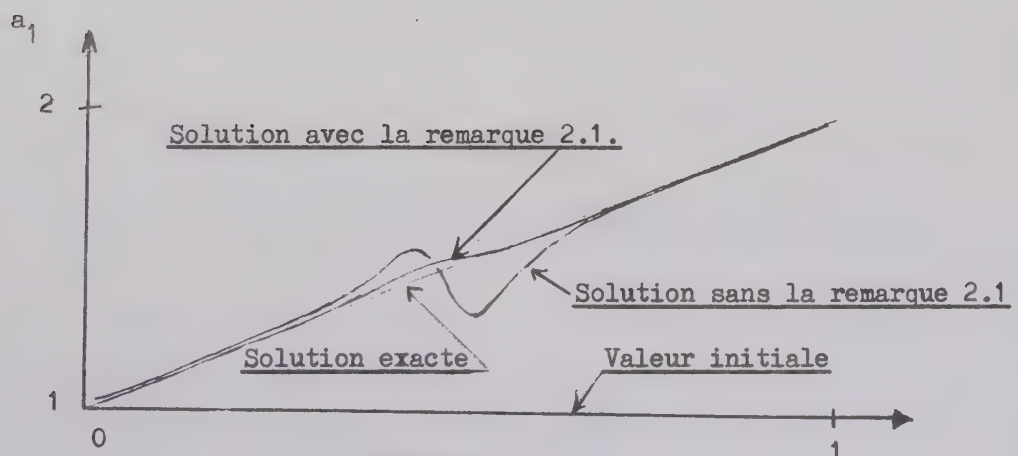


Figure 9

Influence de la remarque 2.1. sur la
forme du coefficient a_1

les temps de calculs que la précision sur a_1 , on a intérêt à utiliser la technique de la remarque 1.3.

iv) a_1 seul inconnu, indépendant du temps, observation ponctuelle

Il n'y a plus ici aucun résultat d'existence et d'unicité.

a) Nous avons d'abord voulu vérifier si l'algorithme convergeait bien. Nous avons pour cela repris l'exemple 2.2, et nous avons observé l'évolution de y en un certains nombres de points de $\Omega =]0,1[$. Les résultats sont consignés dans le tableau 15 et la figure 10. On constate que l'algorithme converge, c'est-à-dire que l'erreur δy entre l'observation et la solution calculée tend bien vers zéro. Par contre le coefficient a_1 lui ne converge pas vers le coefficient $a_{1\text{exact}}$ ayant servi à construire le problème $(\delta a_1 \not\rightarrow 0)$.

b) Nous avons ensuite voulu voir si la solution $a_1(x)$ fournie par l'algorithme, bien que différente de $a_{1\text{exact}}(x)$, permettait cependant de prévoir l'évolution de la solution y aux points d'observation. Pour essayer d'être plus proche de la réalité, nous avons utilisé ℓ'

Exemple 2.3 :

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{1\text{exact}}(x) = 0,05 (1 + 3x) \\ a_0 = 0 \quad \text{connu} \\ y_0(x) = \sin \pi x \\ f(x,t) = - \sum_{i=1}^3 \delta(x - x_i) \otimes f_i(t) \end{array} \right.$$

avec :

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0,25 \quad x_2 = 0,5 \quad x_3 = 0,75 \\ f_1(t) = 1/20 = \text{cste} \quad f_2(t) = 1/10 = \text{cste} \quad f_3(t) = 3/20 = \text{cste} \end{array} \right.$$

$$a_1^0(x) = 1, \quad h = k = 0,05 - \text{Steepest Descent}$$

Abscisses des points d'observation		0,25	0,75	0,25	0,50	0,75
Nombre d'itérations de gradient		130		30		
δy	initiale	0,48		0,65		
	finale	0,004		0,0025		
δa_1	initiale	0,57		0,57		
	finale	0,30		0,21		
Temps de Calcul IBM 360 - 91		4,73 s		1,44 s		

Tableau 15

Identification de a_1 - Observation ponctuelle

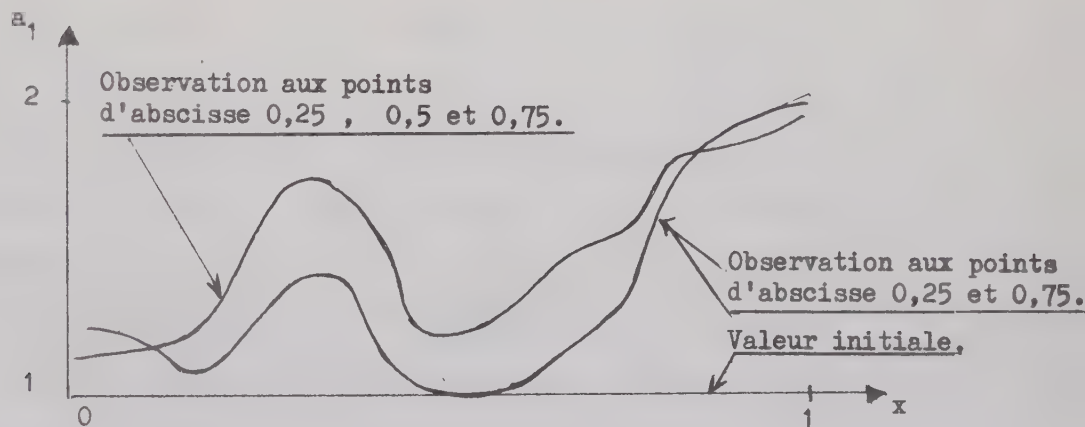


Figure 10

Identification de a_1 - Observation ponctuelle

Cet exemple s'interprète (cf Exemple 3.5 , chapitre II) aux conditions aux limites près, comme l'équation de la pression y d'un gissement exploité par trois puits, aux points d'abscisse x_1 x_2 x_3 , de débit $f_1(t)$, $f_2(t)$ et $f_3(t)$.

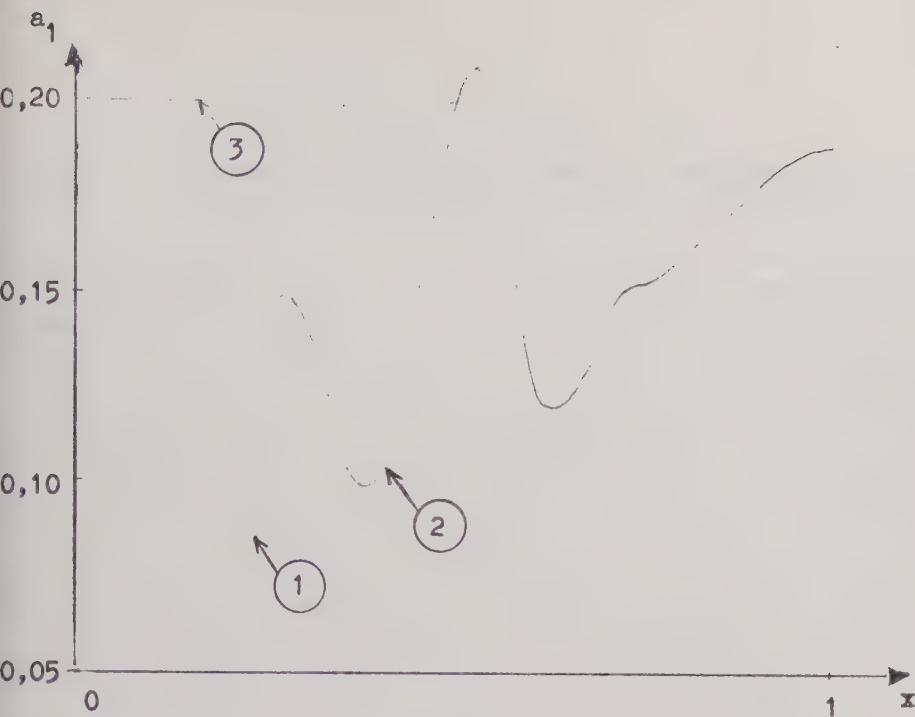
Remarque 2.3 Avec un tel second membre, la solution de y de (2.2) (2.3) (2.4) est dans $L^2(Q)^{(1)}$, et une observation ponctuelle n'a pas de sens, certainement pas en tout cas aux points x_1 x_2 et x_3 ! Or c'est là qu'on l'observe physiquement la pression y . En fait, cette mesure n'a de sens que parce que le puits n'est pas une masse de DIRAC, il est caractérisé par un certain nombre de paramètres "géométriques " (diamètre...) . Mais après discrétisation, pour un pas h fixé, le second membre f est bien une combinaison linéaire de masses de Dirac discrètes, dont les coefficients f_i intègrent les données sur le débit des puits, sur leurs caractéristiques géométriques, et sur le pas de discrétisation h , ce qui justifie les calculs qui suivent.

L'observation $z_{d_i}(t)$ $i = 1, 2, 3$; était engendrée comme valeur au point x_i de la solution du système (2.2) (2.3) (2.4) intégré numériquement ($h = k = \frac{1}{20}$) avec le coefficient $a_{1\text{exact}}$.

En prenant comme initialisation $a_1^0(x) = 0,2 = \text{cste}$, l'algorithme a convergé en 100 itérations et en 2,25 s d'IBM 360-91, δy est passé de 0,13 à 0,001 , δa_1 est passé de 0,086 à 0,03 . Le coefficient a_1 fourni par l'algorithme est représenté figure 11 . Il est différent du coefficient $a_{1\text{exact}}$ ayant servi à construire le problème, mais permet de prévoir l'évolution de la pression dans chaque puits, représentée figure 12 , dans le cas où on décide de maintenir constant le débit des puits.

- c) On peut essayer, pour mieux déterminer a_1 , de se donner a priori une information supplémentaire, par exemple chercher a_1 sous une forme paramétrique. (Pour des résultats numériques dans ce sens, cf § 2.2 Problème de NEUMANN, Observation ponctuelle).

(¹) Dès que la dimension n est ≥ 2 . Pour $n = 1$ $y(-, t)$ est continue en x sur $[0, 1]$ pour presque tout t .



- Légendes
- 1 Courbes correspondant à $a_{1\text{exact}}(x)$
 - 2 Courbes correspondant à la valeur de $a_1(x)$ calculée par l'algorithme.
 - 3 Courbes correspondant à la valeur initiale $a_1^0(x)$

Figure 11 - Le coefficient $a_1(x)$

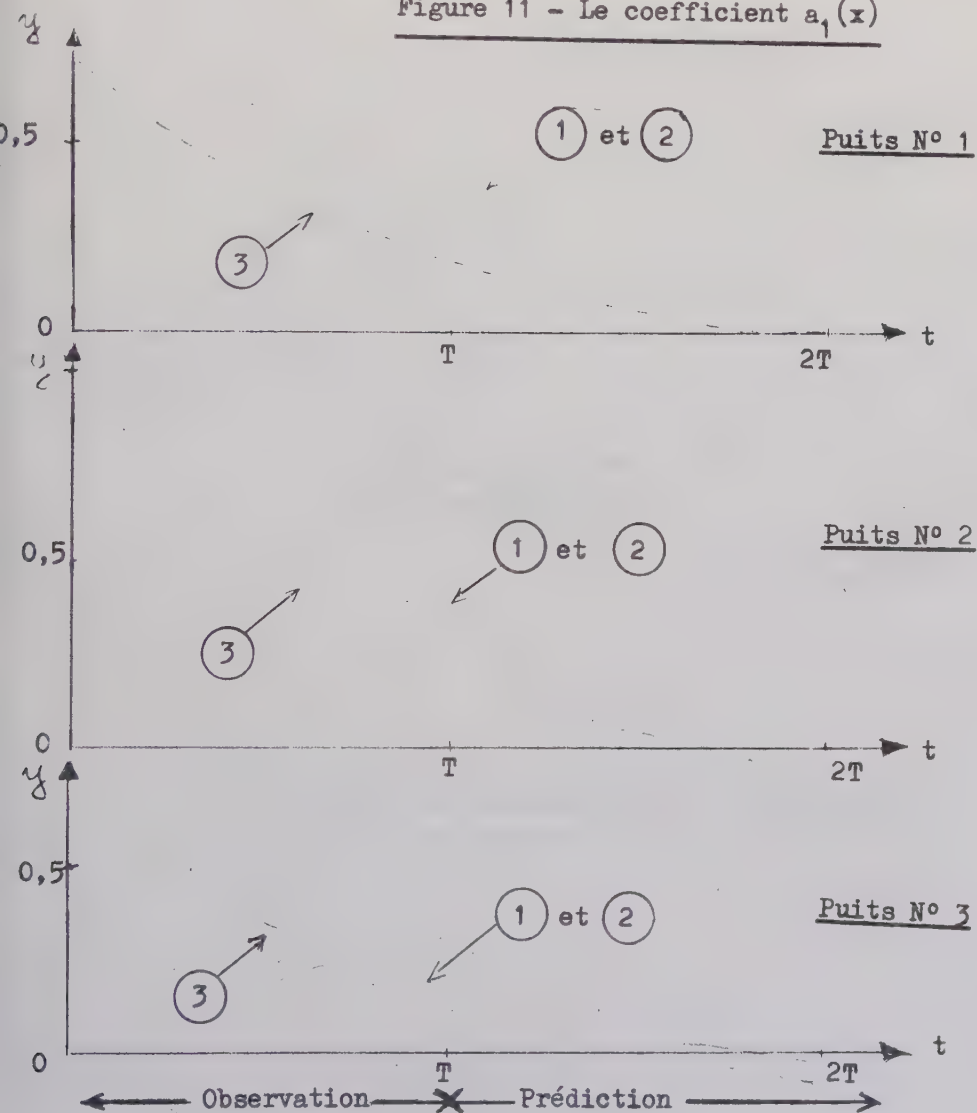


Figure 12 - Evolution de la pression dans les puits

V)

 a_1 seul inconnu, indépendant du temps, Observation finale

Il n'y a plus de résultat d'unicité sur l'exemple 2.3, en initialisant à $a_1^0(x) = 0,2 = \text{cste}$, l'algorithme a convergé, pour $h = k = \frac{1}{20}$, en 580 itérations et 9,77 s d'IBM 360-91, δy est passé de 0,09 à 0,0012 et δa_1 est passé de 0,086 à 0,034. Le coefficient fourni par l'algorithme est représenté figure 13.

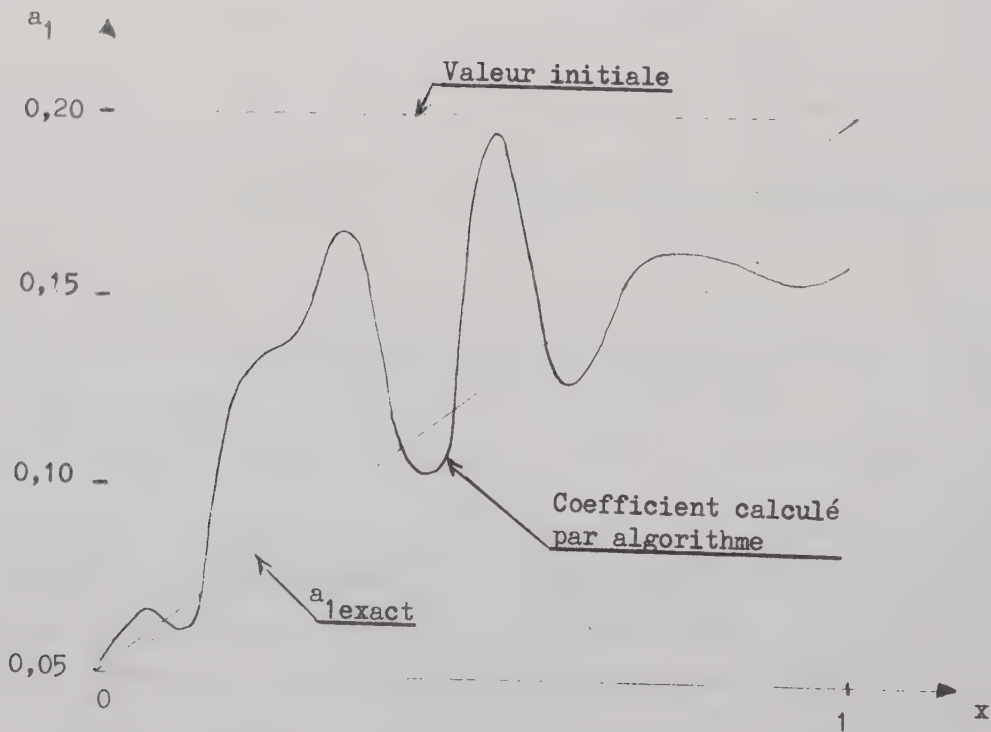


Figure 13

Le coefficient $a_1(x)$, Observation finale

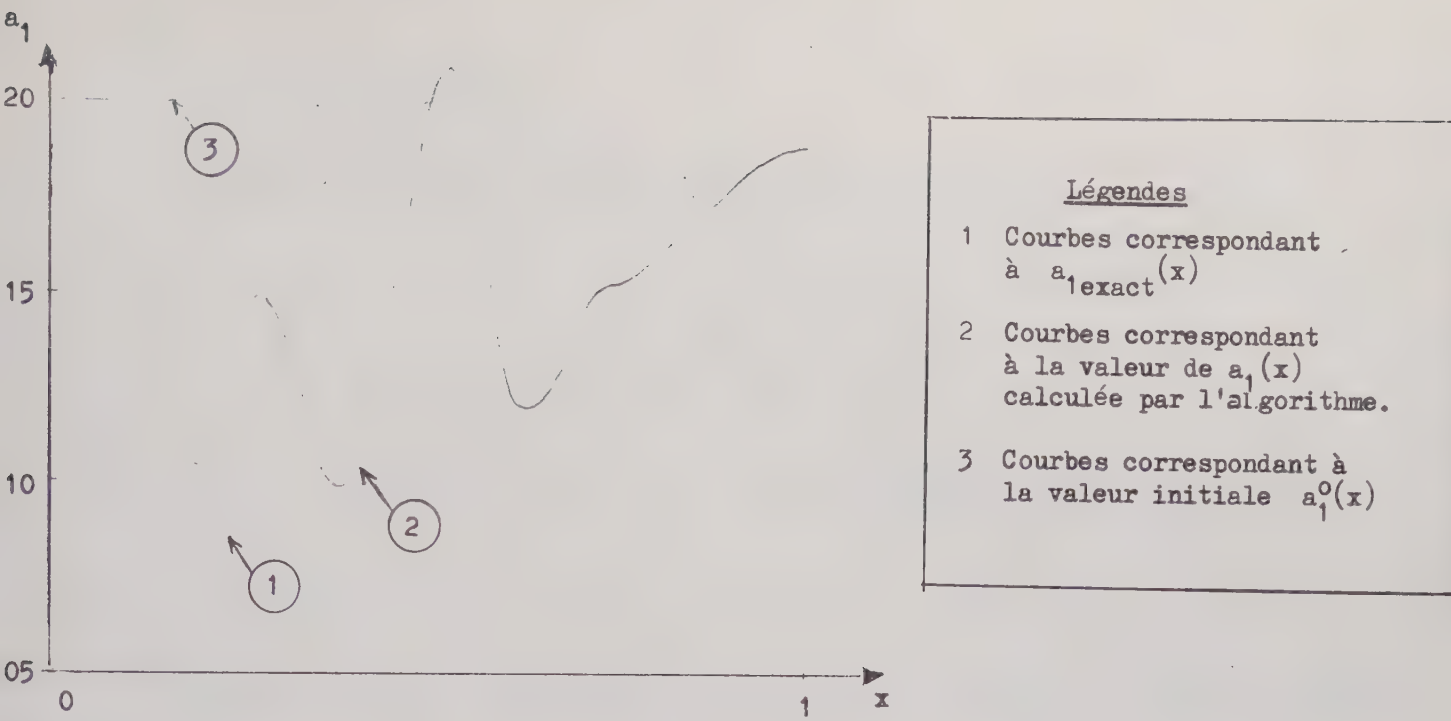


Figure 11 - Le coefficient $a_1(x)$

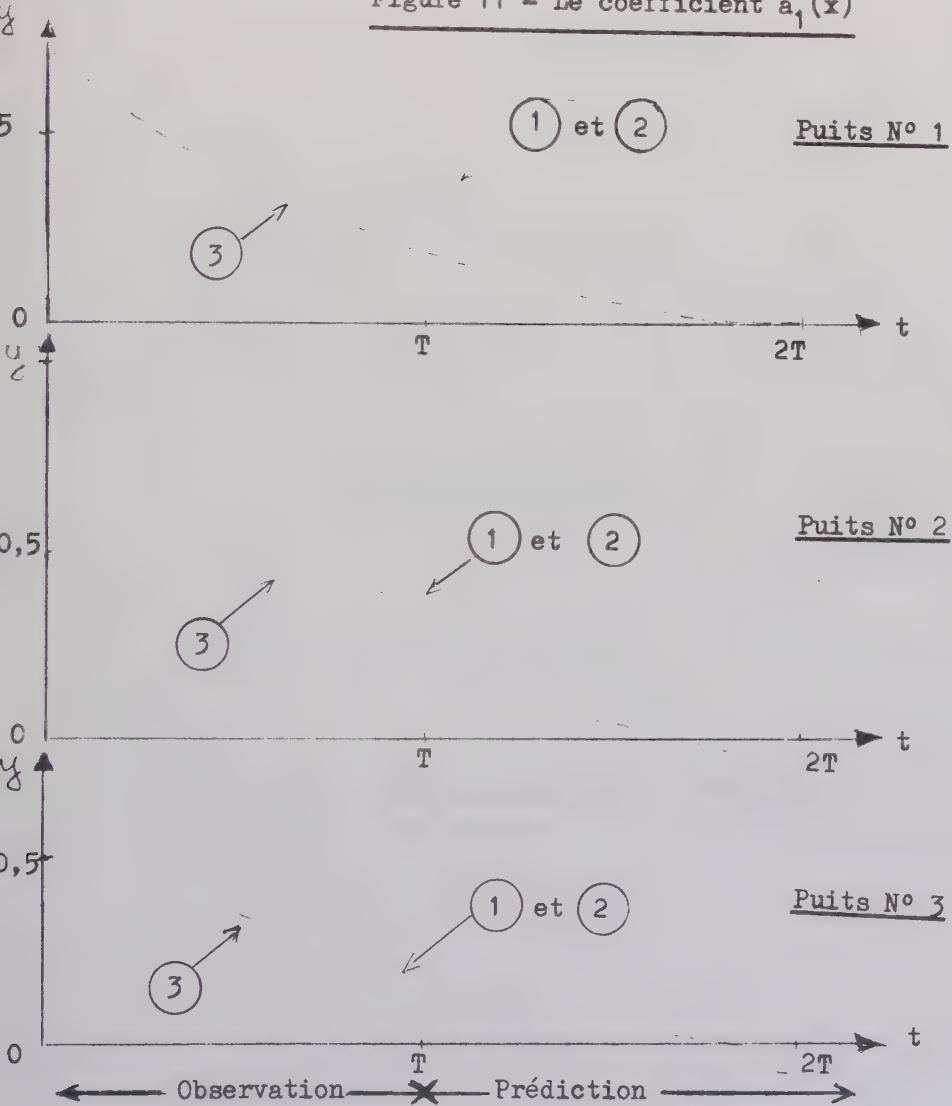


Figure 12 - Evolution de la pression dans les puits

V)

 a_1 seul inconnu, indépendant du temps, Observation finale

Il n'y a plus de résultat d'unicité sur l'exemple 2.3, en initialisant à $a_1^0(x) = 0,2 = \text{cste}$, l'algorithme a convergé, pour $h = k = \frac{1}{20}$, en 580 itérations et 9,77 s d'IBM 360-91, δy est passé de 0,09 à 0,0012 et δa_1 est passé de 0,086 à 0,034. Le coefficient fourni par l'algorithme est représenté figure 13.

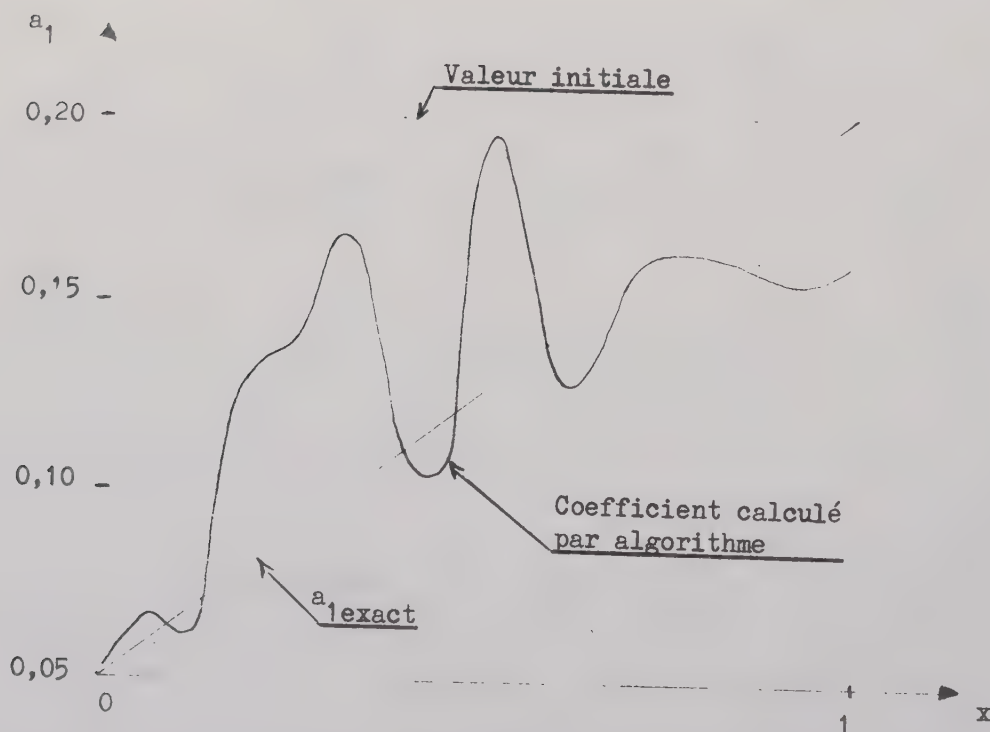


Figure 13

Le coefficient $a_1(x)$, Observation finale

2.2 Le Problème de NEUMANN.

On a traité encore un problème à une dimension d'espace et une de temps :

$$(2.9) \quad \Omega =]0,1[\quad , \quad Q =]0,1[\times]0,T[$$

$$(2.10) \quad \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (a_1(x,t) \frac{\partial y}{\partial x}) + a_0(x,t) y = f(x,t) \quad \text{dans } Q$$

$$(2.11) \quad -a_1 \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = g_1(t) \quad , \quad a_1(x) \frac{\partial y}{\partial x}(1,t) = g_2(t) \quad \text{sur }]0,T[$$

$$(2.12) \quad y(x,0) = y_0(x)$$

Le système (2.10) (2.11) (2.12) était intégré par un schéma de CRANK - NICHOLSON.

i) a₁ et a₀ inconnus, dépendants du temps, observation répartie

Les résultats sont tout à fait analogues à ceux obtenus dans le même cas pour le problème de DIRICHLET (en particulier il n'y a pas unicité de la solution a₁ et a₀). Nous ne donnerons pas le détail des résultats. Les temps de calcul sont de l'ordre de quelques minutes de CAE 90-80 .

ii) a₁ et a₀ inconnus, indépendants du temps, observation répartie

D'après les résultats d'unicité du chapitre II , on a , à chaque point de discrétisation du temps, unicité de a₁ pour a₀ donné, c'est-à-dire une relation entre a₁ et a₀ . On conçoit donc que, pour un pas de temps assez petit, il il n'y ait qu'un couple de fonctions (a₁, a₀) qui satisfassent à chaque instant à ces relations. C'est ce que les résultats numériques confirment. L'exemple utilisé était :

Exemple 2.4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_d(x,t) = 1 + t x^2 \quad , \quad T = 1 \\ a_0 \text{ exact} = 5 + x \\ a_1 \text{ exact} = 1 + x \\ \text{d'où } f, g_1, g_2 \text{ et } y_0 \end{array} \right.$$

Avec comme initialisation $a_0^0 = 4$ et $a_1^0 = 1$, et pour des pas d'espace et de temps $h = k = 0,05$, l'algorithme a convergé en 20 itérations et 2mm 63 s de CII 10070, δy est passé de 0,37 à 0,00062, δa_1 est passé de 0,55 à 0,022 et δa_0 est passé de 1,52 à 0,07. L'allure des coefficients a_0 et a_1 est donnée par la figure 14.

iii) a_1 seul inconnu, indépendant du temps, observation ponctuelle

Pour compléter les résultats obtenus dans ce cas lors de l'étude d'un problème de DIRICHLET, nous avons voulu voir si l'on pouvait améliorer l'allure du coefficient a_1 trouvé en le cherchant sous une forme paramétrique donnée, ici un polynôme du 3ème degré en x . Les deux exemples suivants (cf Exemple 3.5 chapitre II : Identification de la porosité dans un gisement d'hydrocarbure.) ont été traités :

Exemple 2.5 :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \text{ exact} = 0 \\ a_1 \text{ exact} = 0,05 (2 - 0,5 \sin 2 \pi x) \\ y_0(x) = 1 = \text{cste} \\ f(x,t) = \sum_{i=1}^3 \delta(x - x_i) \times f_i(t) \end{array} \right.$$

avec :

$$x_1 = 0,25 \quad x_2 = 0,5 \quad x_3 = 0,75$$

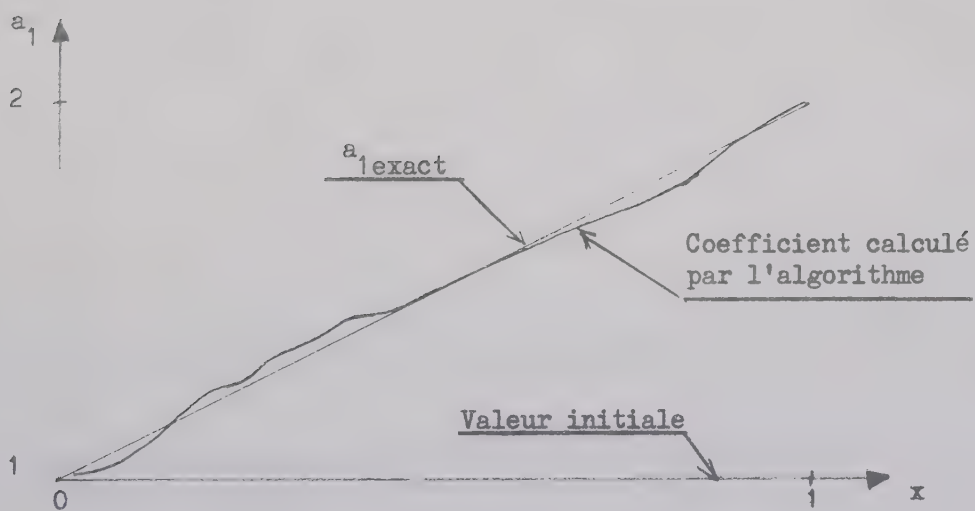
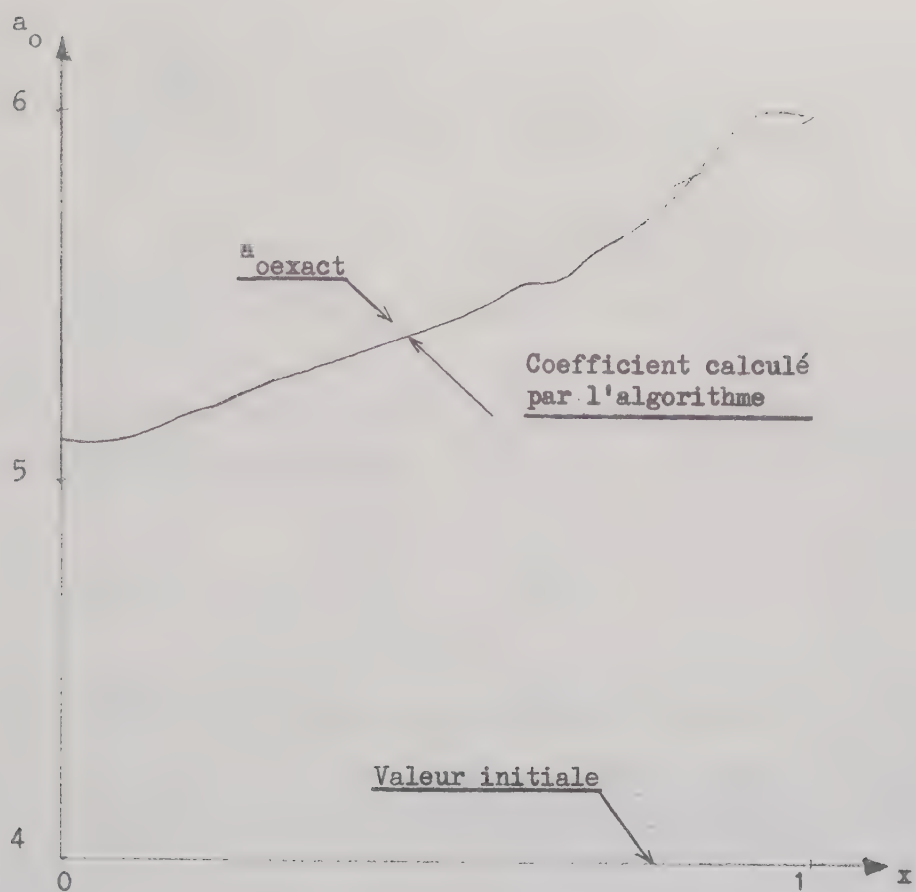


Figure 14

Identification de a_0 et a_1 (indépendants du temps)

(Observation répartie)

$$f_1(t) = 0,0125 \quad f_2(t) = 0,1 \quad f_3(t) = 0,6$$

d'où z_d par intégration numérique du système (2.10) à (2.12) avec $h = k = 0,05$ (même remarque que la remarque 2.3). ■

Exemple 2.6 : Comme l'exemple 2.5 , sauf :

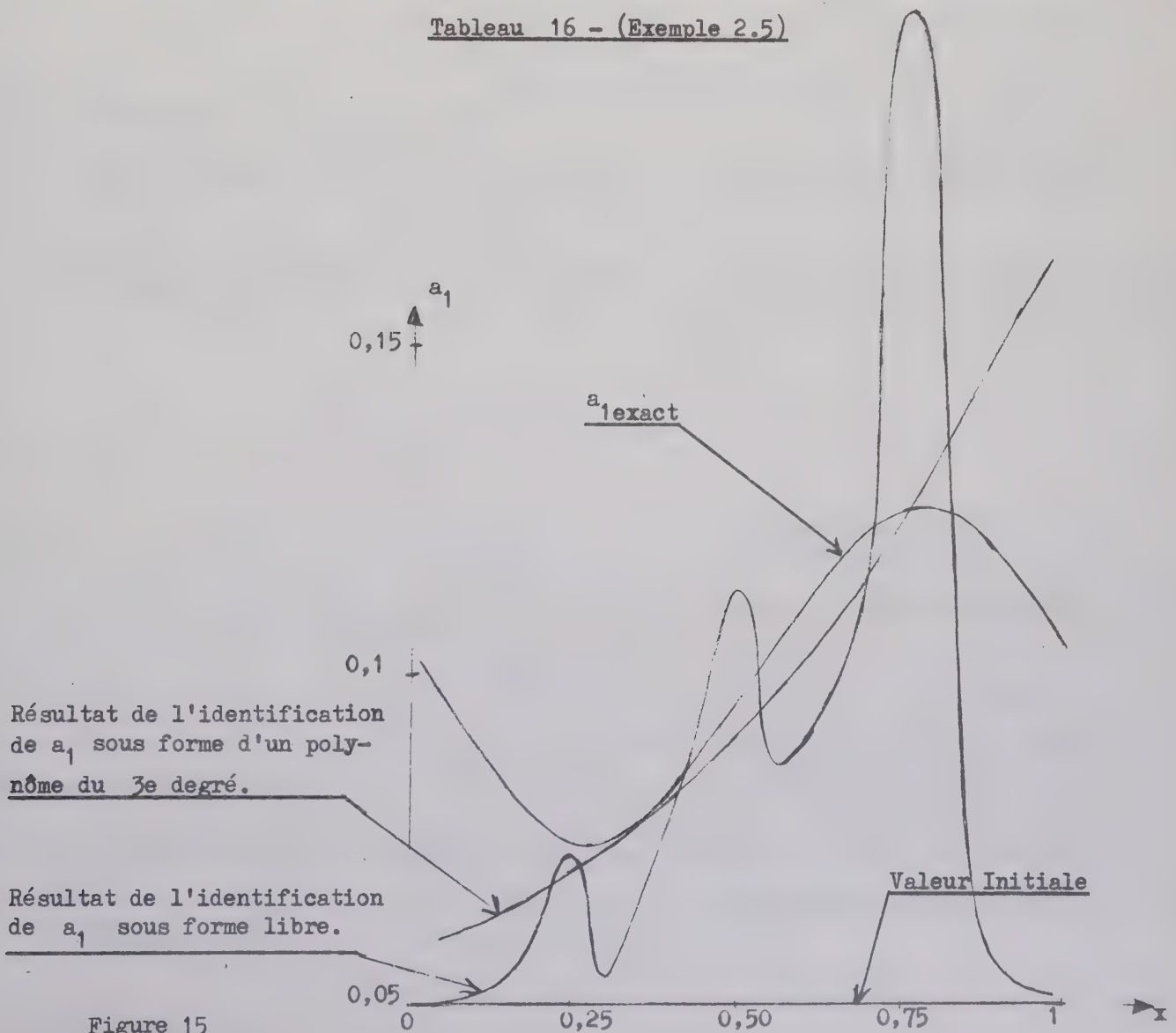
$$a_{1\text{exact}} = 0,1 + 0,05 x + 0,07 x^2 + 0,09 x^3 \quad \blacksquare$$

Suivant l'exemple 3.5 du chapitre 2 , l'observation se faisait aux points $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$ et $x_3 = 0,75$. Les résultats sont consignés dans les tableaux 16 et 17 et les figures 15 et 16 .

L'allure du coefficient a_1 , lorsqu'on le laisse libre, sur les figures 15 et 16, semble montrer que l'information collectée au cours du temps aux trois points d'observation ne " diffuse " pas en espace ; lorsqu'on cherche a_1 sous forme paramétrique, on trouve alors un coefficient a_1 qui est proche du coefficient exact au voisinage des points d'observations.

$h = k = 0,05$ - Observation ponctuelle aux points : $x_1 = 0,25$ $x_2 = 0,50$ $x_3 = 0,75$		
a_1 recherché sous la forme :	libre	Polynôme de degré 3
a_1^0	0,05	0,05 + 0,005 ($x + x^2 + x^3$)
Nombre d'Itérations de gradient	30	40
δ_y {	initiale	0,037
	finale	0,00088
δ_{a_1} {	initiale	0,051
	finale	0,034
Temps de Calcul CII 10070	3,481 mn	3,67 mn

Tableau 16 - (Exemple 2.5)

Figure 15
(Exemple 2.5)

$h = k = 0,05$ - Observation ponctuelle aux points :			$x_1 = 0,25$ $x_2 = 0,50$ $x_3 = 0,75$
a_1 recherché sous forme	libre	Polynôme de degré 3	
a_1^0	0,05	$0,05 + 0,005 (x + x^2 + x^3)$	
Nombre d'itérations de gradient	20	10	
δy {	initiale	0,051	
	finale	0,00096	
δa_1 {	initiale	0,123	
	finale	0,094	
Temps de Calcul CII 10 070	3,164 mn	3,01 mn	

Tableau 17 - (Exemple 2.6)

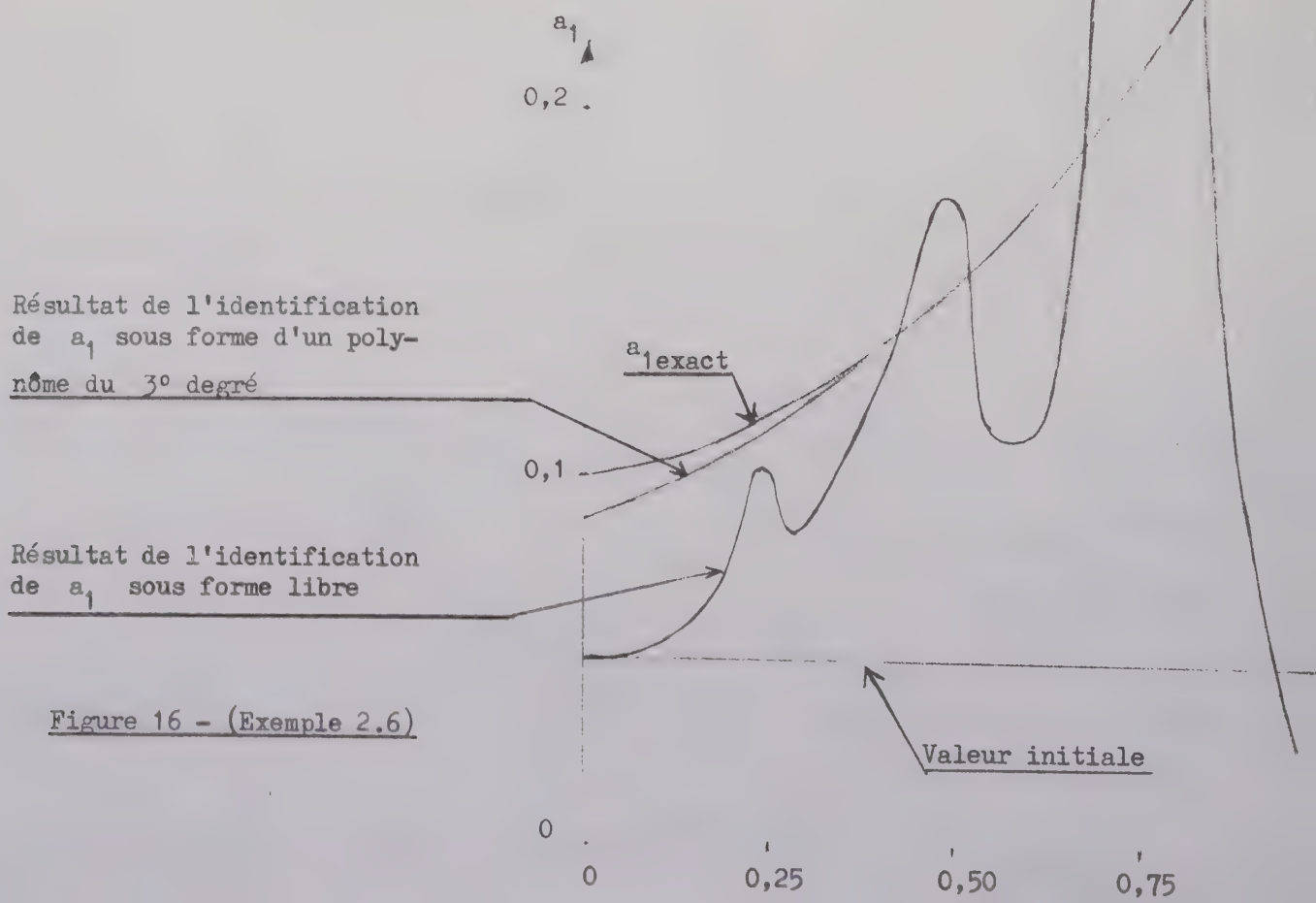


Figure 16 - (Exemple 2.6)

3

EQUATIONS HYPERBOLIQUE DU 2ème ORDRE

On a considéré ici l'équation des ondes une dimension d'espace (cf chap. II, § 4) :

$$(3.1) \quad \Omega =]0,1[\quad Q =]0,1[\times]0,T[$$

$$(3.2) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (a_1(x) \frac{\partial y}{\partial x}) + a_0(x) y = f(x,t)$$

$$(3.3) \quad y(0,t) = y(1,t) = 0 \quad t \in]0,T[$$

$$(3.4) \quad y(x,0) = y_0(x) \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = y_1(x) \quad x \in \Omega$$

Le système (3.2) (3.3) (3.4) était intégré par un schéma explicite, car ici le pas de temps k était de toute façon limité par suite de la condition de propagation liant h , k et a_1 . Le sous-programme correspondant était prévu pour intégrer au choix le système direct (3.2) (3.3) (3.4) ou le système rétrograde correspondant au système adjoint.

Pour rester dans le cadre du chapitre II, § 4 on n'a considéré que des coefficients a_0 et a_1 indépendants du temps.

L'exemple qui a servi à faire tous les essais numériques est le suivant :

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_{0\text{exact}}(x) = 2 = \text{cste} & T = 0,5 \\ a_{1\text{exact}}(x) = 1 + x & h = 0,05 \\ z_d(x,t) = x(x-1) e^t & k = 0,025 \\ \text{d'où } f, y_0 \text{ et } y_1 \end{array} \right.$$

Le pas en espace h étant fixé à 0,05, le pas en temps k a été choisi par tâtonnements pour que la condition de propagation ne soit pas violée lorsque, au cours des itérations, a_1 varie.

La méthode utilisée pour minimiser J était une méthode de STEEPEST DESCENT, et le test d'arrêt ε des itérations de gradient portait sur la différence des valeurs de $\delta y = J^{\frac{1}{2}}$ à deux itérations successives.

i)

 a_1 et a_0 inconnus - Observation répartie

Suivant les résultats obtenus dans ce cas pour le problème parabolique avec conditions de NEUMANN (cf § 2.2), nous avons d'abord tenté d'identifier à la fois a_0 et a_1 .

Pour un test d'arrêt $\varepsilon = 10^{-6}$ et avec une initialisation $a_1^0 = 1$ et $a_0^0 = 1,5$, l'algorithme a convergé en 60 itérations et 2,58mn CII 10070 ;

δy est passé de 0,0080 à 0,00025, δa_1 de 0,57 à 0,14 et δa_0 de 0,50 à 0,444. L'allure de a_1 et a_0 est représenté sur la figure 17.

On constate que si a_1 a bien évolué vers $a_{1\text{exact}}$, a_0 n'a pratiquement pas "décollé" de sa valeur initiale a_1^0 . Il semble donc que le système (3.2) à (3.4) soit beaucoup plus sensible à a_1 qu'à a_0 , et qu'on n'ait pas poussé assez loin la minimisation.

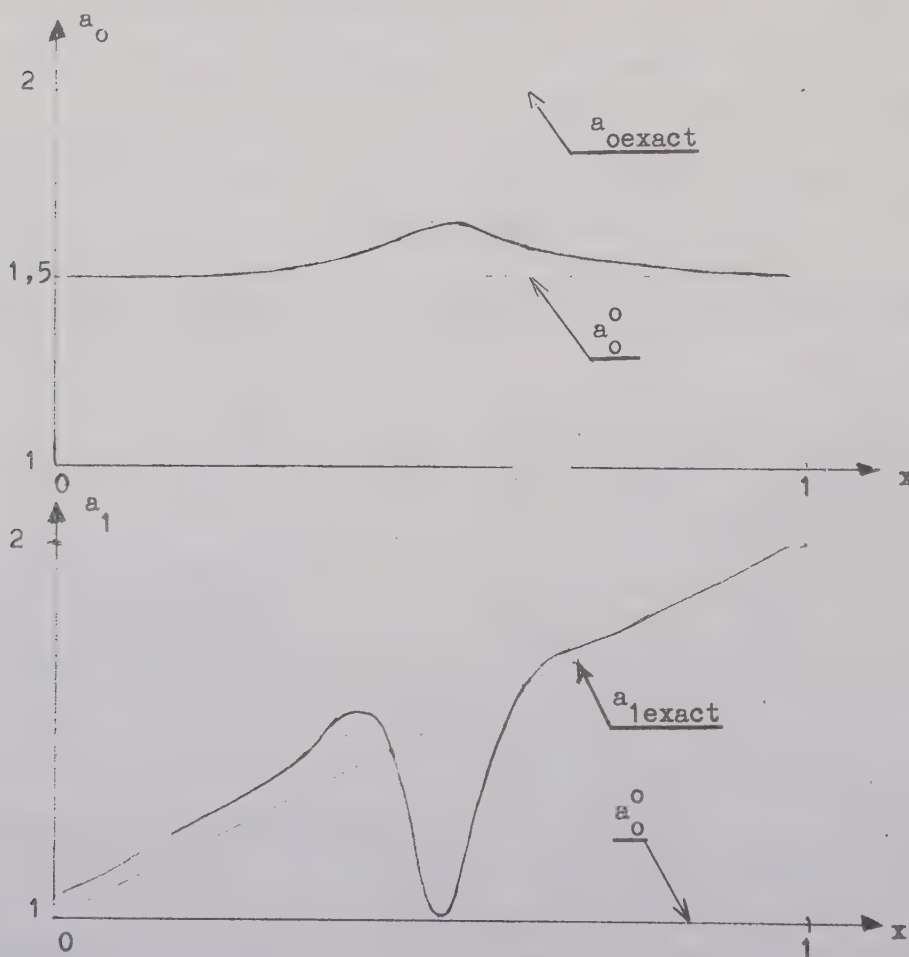


Figure 17 : Identification simultanée de a_0 et a_1
(Observation répartie)

ii)

 a_0 seul inconnu - observation répartie

Pour un test d'arrêt $\varepsilon = 10^{-15}$ et une initialisation $a_0^0 = 1,5$,
 l'algorithme a convergé en 150 itérations et 3.44 mn CII 10070 ; δy
 est passé de 0,00023 à 0,00001 et δa_0 de 0,50 à 0,116 . L'allure
 de a_0 est représenté sur la figure 18 .

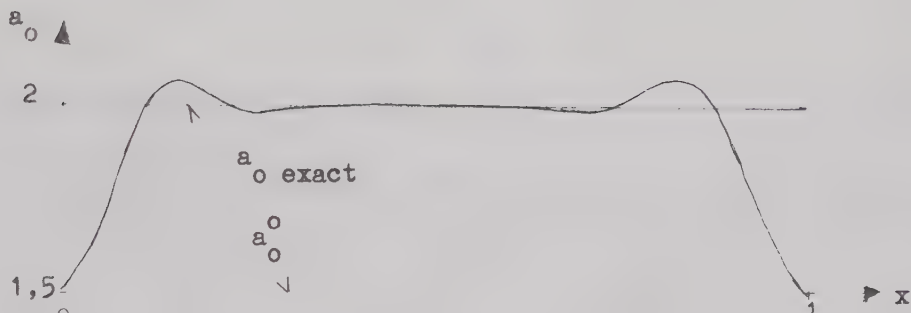


Figure 18 - Identification de a_0 seul
(Observation répartie)

iii)

 a_1 seul inconnu - observation répartie

Pour un test d'arrêt $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-7}$ et une initialisation $a_1^0 = 1$, l'algorithme a convergé en 200 itérations et 4,956 mn CII 10070 ; δy est passé de 0,042 à 0,00016 et δa_1 de 0,57 à 0,103. L'allure de a_1 est représentée par la figure 19. On constate qu'il est bon, sauf au voisinage du point où la dérivée $\frac{\partial z_d}{\partial x}$ s'annule. On aurait eu de meilleurs résultats en utilisant une procédure du type de celle de la remarque 1.3.

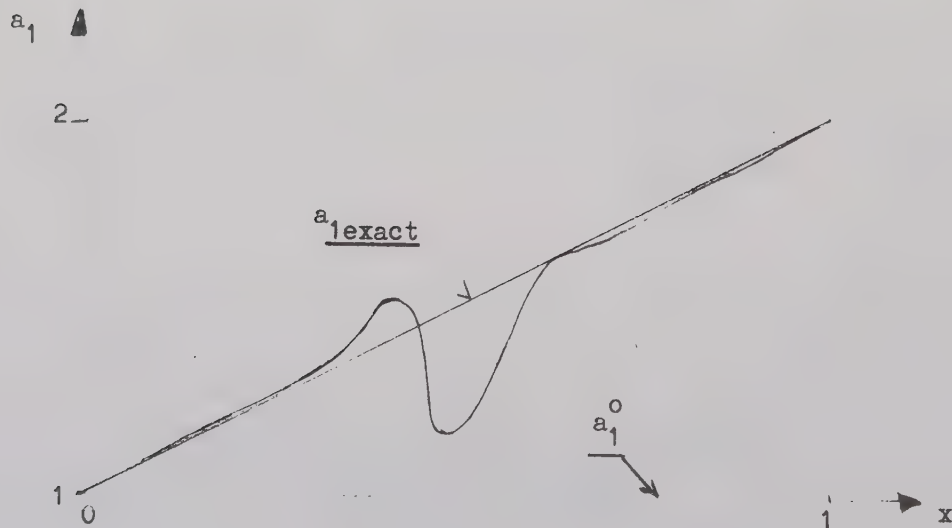


Figure 19 - Identification de a_1 seul
 (Observation répartie)

iv)

 a_1 et a_0 inconnus - observation ponctuelle

On conserve ici le même exemple, mais on n'observe l'évolution de la solution qu'aux points x_1 et x_2 d'abscisse 0,15 et 0,75 . Bien que ce cas n'ait pas été traité au chapitre II , nous avons tenté des expériences numériques pour voir si les phénomènes de propagation ne permettait pas une meilleure identification. En outre, a_1 et a_0 étant indépendants du temps, nous avons regardé l'influence d'un bruit temporel sur l'observation (on pouvait donc espérer ici un effet de lissage). Les résultats sont consignés dans le tableau 17 et la figure 20 . On constate que, si les coefficients a_1 et a_0 trouvés permettent de rendre compte de l'observation, ils ne ressemblent pas beaucoup à $a_{1\text{exact}}$ et $a_{0\text{exact}}$. L'effet de lissage obtenu est représenté sur la figure 21, ainsi que l'évolution de la solution y avec les divers coefficients jusqu'à l'instant $2T$. On constate que ces coefficients permettent une prédiction correcte de l'évolution de y aux points d'observation.

$\varepsilon = 10^{-8}$ $a_0^0 = 1,5$ $a_1^0 = 1$			
Bruit sur l'observation :	Pas de bruit	1 %	4 %
δ_y	initiale	0,0080	0,0083
	finale	0,00017	0,0016
δ_{a_0}	initiale	0,5	0,5
	finale	1,37	1,10
δ_{a_1}	initiale	0,57	0,57
	finale	0,26	0,31
nb. ité.gradient	120	20	20
Temps de Calcul CII 10 070	3,52 mn	1,76 mn	1,71 mn

Tableau 17 - Identification de a_0 et a_1
(Observation ponctuelle)

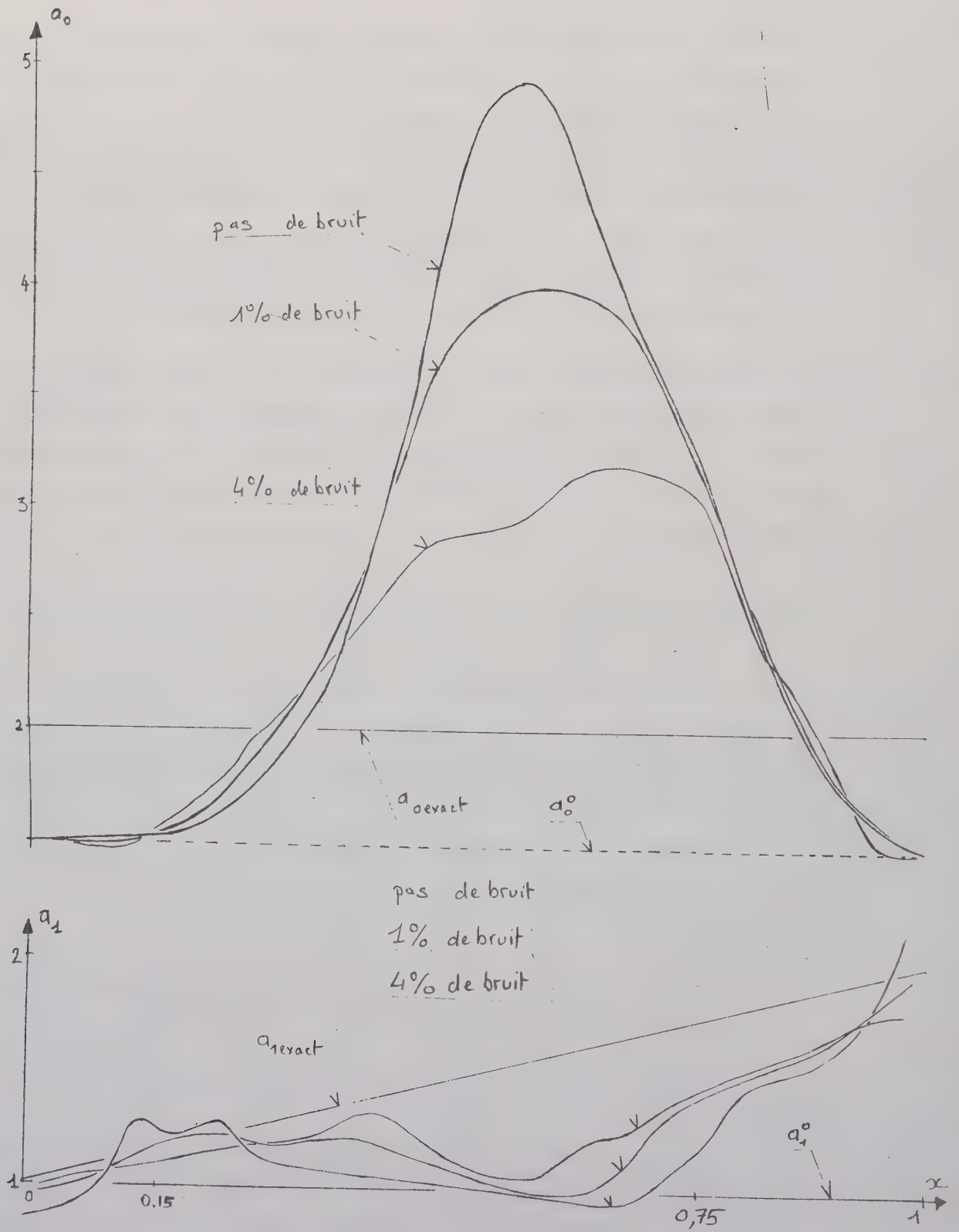


Figure 20 : Identification de a_0 et de a_1
 (Observation ponctuelle)

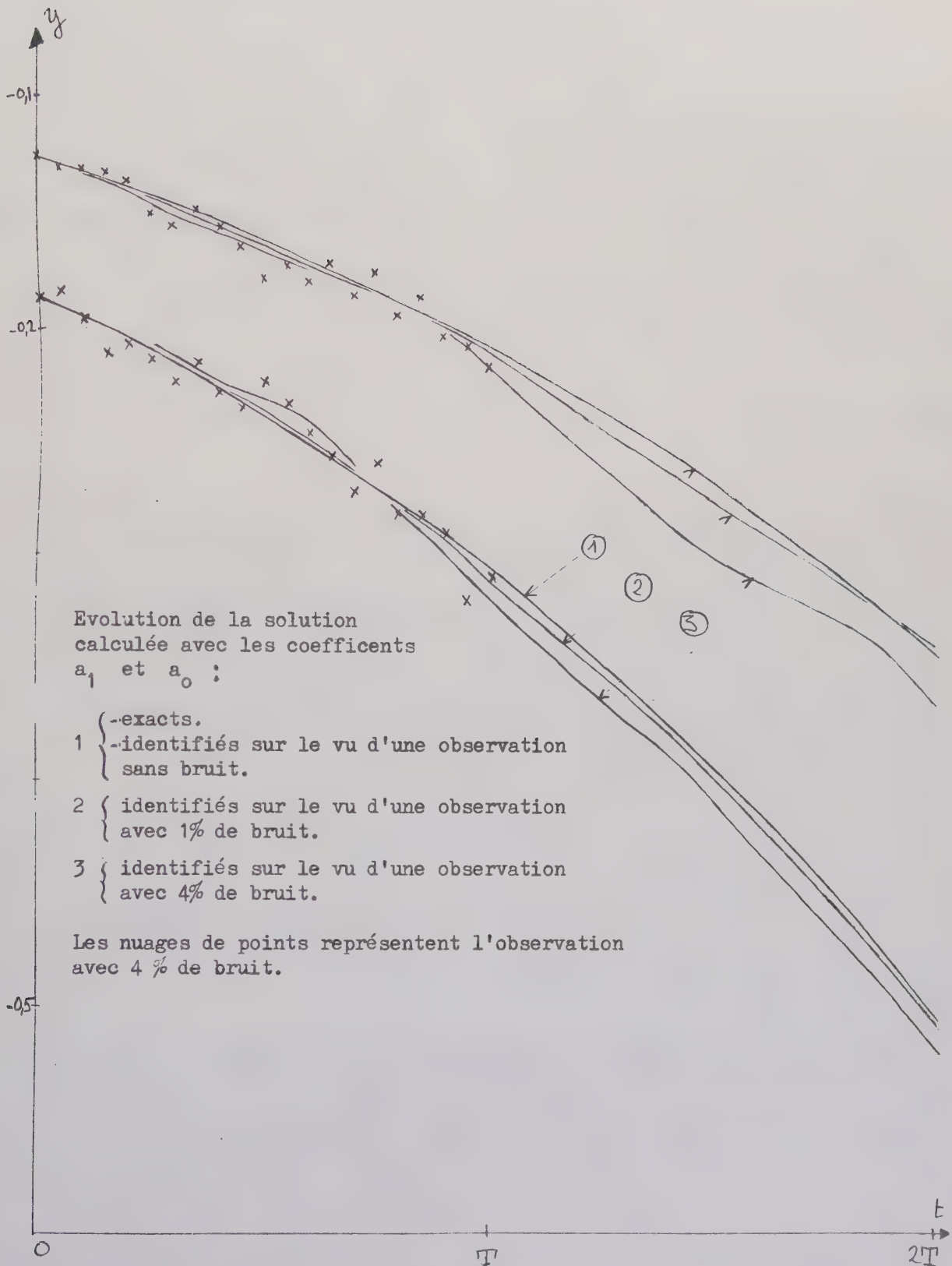


Figure 21 : Identification de a_0 et a_1 . Evolution
de la solution y aux deux points d'observation.

v)

 a_0 seul inconnu - observation ponctuelle

On garde toujours les mêmes points d'observation. Avec un test d'arrêt $\varepsilon = 10^{-8}$ et une initialisation $a_0^0 = 1,5$, l'algorithme a convergé en 30 itérations ; δy est passé de 0,00023 à 0,000018 et ε_{a_0} de 0,50 à 0,19.

Avec 1% de bruit sur l'observation, toutes choses égales par ailleurs, l'algorithme a convergé en 4 itérations et 1,54 mn CII 10070.

L'allure de a_0 est donnée, dans les deux cas, par la figure 22.

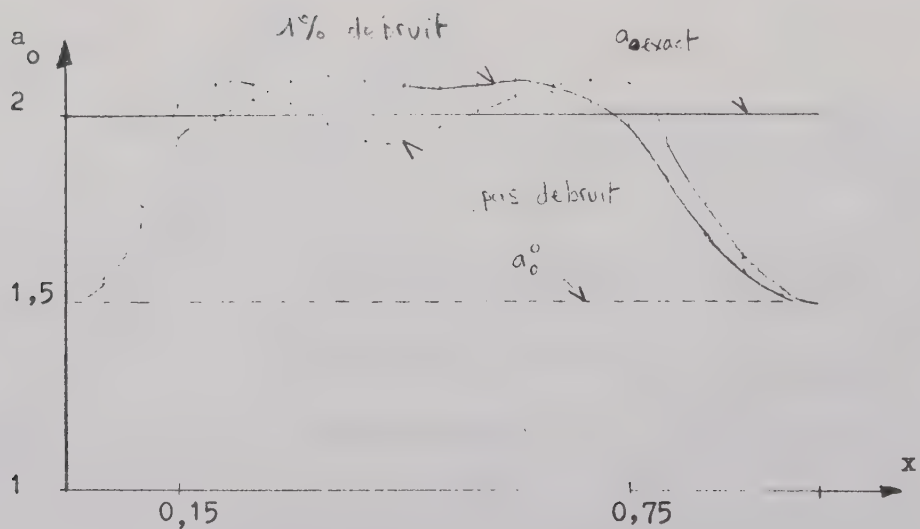


Figure 22 : Identification de a_0 seul
(Observation ponctuelle)

vi)

 a_1 seul inconnu - observation ponctuelle

On conserve les mêmes points d'observation . Avec un test d'arrêt $\varepsilon = 10^{-8}$ et une initialisation $a_1^0 = 1$, l'algorithme a convergé en 40 itérations et 1,91 mn CII 10070 ;

S_y est passée de 0,0071 à 0,00096 et δa_1 de 0,57 à 0,23 .

Avec 1% de bruit sur l'observation, l'agorithme, toutes choses égales par ailleurs, a convergé en 15 itérations et 1,76 mn CII 10070.

L'allure de a_1 , dans les deux cas, est représenté sur la figure 23 .

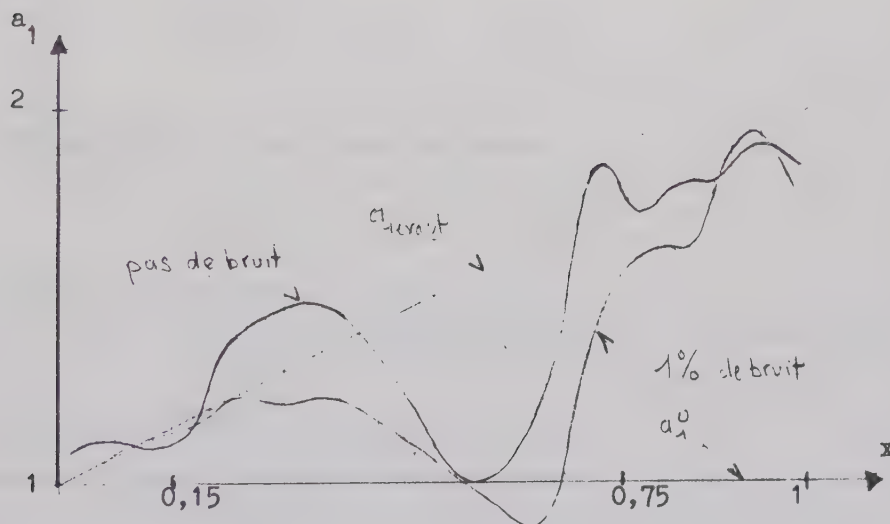


Figure 23 : Identification de a_1 seul
(Observation ponctuelle)

B I B L I O G R A P H I E

- [1] C. BARDOS : " Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du 1er ordre à coefficients réels ; théorèmes d'approximation ; application à l'équation de transport. " Thèse - Paris - 1969.
- [2] A. BENSOUSSAN : " Sur l'identification et le filtrage de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles." Cahier N° 1 - IRIA 1969.
- [3] A. BENSOUSSAN : " Filtrage optimal des Systèmes Linéaires." Dunod 1971.
- [4] J.P. BERTRAN : " Méthode d'ajustement des paramètres d'un système différentiel linéaire ou non linéaire." Thèse 3ème cycle - Nancy 1969.
- [5] BREZIS - CRANDALL - PAZY : " Perturbations of non linear maximal monotone sets in Banach spaces." Comm. Pure App. Math. 23 (1970) p.123-144.
- [6] J. CEA " Approximation Variationnelle des Problèmes aux limites." Thèse - Paris 1964.
- [7] G. CILIGOT-TRAVAIN : " Estimation Bayésienne et identification des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles." Thèse Docteur Ingénieur, Paris 1970.
- [8] Y. EMSELLEM , Y. LEROLLE et G. de MARSILLY : " Identification automatique des paramètres hydrauliques." E.N.S. Mines de Paris - Centre d'Informatique Géologique Réf. LHM/R70/8
- [9] E. IRVING " Identification des Systèmes." Notes I - II - III . Notes internes E.D.F., Etudes et Recherches HR 8161/5, HR 8202/5, HF 267/2 (1968)
- [10] P. JACQUARD : " Résolution d'une équation aux dérivées partielles de type parabolique." Institut Français du Pétrole. Séminaire de Calcul Numérique de l'Ecole Polytechnique.
- [11] J.L. KURT : " Ajustement des paramètres des équations aux dérivées partielles. Application à un problème de chaleur." Thèse 3ème cycle - Nancy 1968.

- [12] Y. KAWAMOTO et J. VIDAL :
 " A Function Space Approach to Parameter Identification in distributed Systems."
 San Remo, 1968.
- [13] M.M.LAURENTIEV :
 " Some Improperly posed problems of mathematical Physics. "
 Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 11, 1967.
- [14] LAURENTIEV, ROMANOV , VASILIEV :
 " Multidimensional Inverse Problems for differential equations."
 Lectures Notes in Mathematics, 167, Springer 1970.
- [15] J.L.LIONS : " Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites."
 Springer - 1961.
- [16] J.L.LIONS : " Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles."
 Dunod - 1968.
- [17] J.L.LIONS : " Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires."
 Dunod - Gauthier Villars - Paris 1969.
- [18] J.L.LIONS : " On some optimisation Problems for Linear Parabolic Equations."
 in " Functional analysis et Optimization.",
 Ed. by Cafanello, Ac. Press 1966.
- [19] J.L.LIONS et E.MAGENES :
 " Problèmes aux limites non homogènes et application."
 (Volumes 1 et 2) - Dunod 1968.
- [20] F. MURAT " Un théorème d'existence pour un problème de contrôle optimal régi par une équation aux dérivées partielles où le contrôle intervient dans les coefficients."
 A paraître.
- [21] R.W.PAULSON : " The Longitudinal Diffusion Coefficient in the Delaware River Estuary as determined from a steady-state Model."
 Water Resources Research, Vol.5, N° 1, Feb. 1969.
- [22] F.J.PERDREAUVILLE a,d R.E.GOODSON :
 " Identification of Systems described by partial differential Equations."
 Journal of Basic Engineering, June 1966, 463.
- [23] P.A. RAVIART : " Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires."
 Thèse 1965 - Paris.
- [24] SEMA : " Commande optimale et identification de Systèmes aux Dérivées Partielles."
 Rapport DGRST N° 4 - Oct.1970.

- [25] SRIDHAR et PEARSON : " Digital estimation of non linear Processes."
- [26] S.G. TZAFESTAS : " Identification of stochastic distributed parameter systems."
Int. J. Control, 1970, Vol.11, N° 4, 619-624.
- [27] V. VEMURI and W.J. KARPLUS :
" Identification of non-linear parameters of ground water Basins by Hybrid computation."
Water Resources Research. Vol.5 - N° 1 . Feb.1969.
- [28] D.A. WISNER, R.L. PERRINE and Y.Y.HAIMES :
" Modeling and Identification of Aquifer Systems of High Dimension."
Automatica, Vol. 6 , p.p.77-86, Pergamon Press, 1970.
- [29] K. YOSIDA : " Functional Analysis."
Grundlehren B.123, Springer, Berlin , 1965.

UNIVERSITE de PARIS VI

11, Quai Saint Bernard - Paris 5

SERVICE DE LA SCOLARITE

Bureau des Enseignements du 3e Cycle

tél. 336.25.25 et 325.12.21

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : d . ' E . T . A . T
THESE DE : ES - SCIENCES . MATHEMATIQUES

NOM : C . H . A . V . E . N . T
Prénoms : Guy
né le . . 9 MAI . . 19.43 à LYON . (69) Dép^t : RHONE

1ère THESE : " ANALYSE FONCTIONNELLE ET IDENTIFICATION DE
. COEFFICIENTS REPARTIS DANS LES EQUATIONS AUX DERIVES PAR-
. TIELLES . "

2e THESE (Propositions faites par l'Université) : . . . " REPRESENTATION CANONIQUE
. DES PROCESSUS GAUSSIENS . "



Vu et Approuvé

PARIS, le . . 2 . JUIN . 1971 .

Le Président

de l'Université de PARIS VI

A handwritten signature in dark ink, appearing to be "A. J. J.", written over a horizontal line.

